

3 EQUILIBRIUM

CHAPTER OUTLINE

3/1 Introduction
SECTION A EQUILIBRIUM IN TWO DIMENSIONS
 3/2 System Isolation and the Free-Body Diagram
 3/3 Equilibrium Conditions
SECTION B EQUILIBRIUM IN THREE DIMENSIONS
 3/4 Equilibrium Conditions
 3/5 Chapter Review

2019-03-21 Chap3 1

3/1 INTRODUCTION

물체의 평형조건(식) 平衡條件(式) equilibrium condition(equation)

$$\mathbf{R} = \Sigma \mathbf{F} = 0 \quad \mathbf{M} = \Sigma \mathbf{M} = 0 \quad (3/1)$$

2019-03-21 Chap3 2

3/2 SYSTEM ISOLATION AND THE FREE-BODY DIAGRAM

자유물체도 自由物體圖 Free Body Diagram

생각하고 있는 물체와 이 물체에 작용하는 힘들만 그린다. (그 물체로 부터 다른 물체에 작용하는 힘들은 고려하지 않는다.)

the free-body diagram is the most important single step in the solution of problems in mechanics.

* Newton의 제3법칙 - 작용과 반작용.

2019-03-21 Chap3 3

* 자유물체도의 작성 단계

1. 대상 물체 범위의 선정 → 결정 혹은 분리 : 미지수
2. 선정된 범위의 분리. (정제선)
3. 힘의 표시 (vector)
4. 좌표축의 선정. (오른 좌표계).

* 그 크기를 무시할 수 없는 힘들은 모두 표시할 것.

2019-03-21 Chap3 4

Modeling the Action of Forces

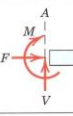
2차원 해석에서 힘의 작용에 관한 모델링	
접촉의 유형과 힘의 원점	분리된 물체에의 작용
1. 유연한 케이블, 벨트, 체인 또는 로프 케이블의 질량 무시 가능 케이블의 질량 무시 불가능	유연한 케이블에 의해 작용하는 힘은 항상 케이블 방향으로 물체 밖으로 작용하는 인장력이다.
2. 매끄러운 표면 	접촉하는 힘은 면에 수직으로 작용하는 압축력이다.
3. 거친 표면 	거친 표면은 접촉 압력 R의 수직성분 N뿐만 아니라, 접선성분 분력 R(마찰력)도 지지할 수 있다.

2019-03-21 Chap3 5

2차원 해석에서 힘의 작용에 관한 모델링

접촉의 유형과 힘의 원점	분리된 물체에의 작용
4. 물리 지지 	물리, 흔들림침, 혹은 볼 지지는 지지면에 수직으로 작용하는 압축력을 전달한다.
5. 자유로이 미끄러지는 안내홈(guide) 	칼라나 슬라이더는 매끄러운 지지면을 따라 자유롭게 움직이며, 안내홈에 수직인 힘을 지지할 수 있다.

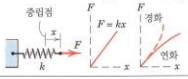
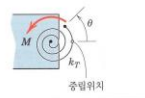
2019-03-21 Chap3 6

2차원 해석에서 힘의 작용에 관한 모델링	
접촉의 유형과 힘의 원점	분리된 물체에의 작용
6. 핀 결합 	자유롭게 회전하는 핀 자유롭게 회전된 결합은 회전축에 수직인 어떤 방향의 힘도 지지하며 보통 2개의 분력 R_x와 R_y로 표시한다. 자유롭게 회전하지 못하는 핀 또한 우력 M도 지지한다. 
7. 박혀 있거나 고정된 지지 	박혀 있거나 고정된 지지부는 축방향 하중 F, 수직 방향 하중 V(전단력), 우력 M(굴림모멘트)을 지지할 수 있다. 

2019-03-21

Chap3

7

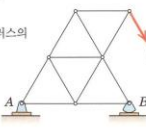
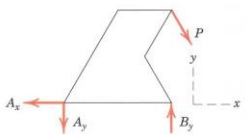
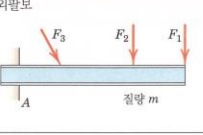
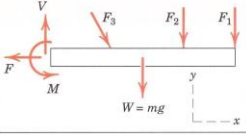
2차원 해석에서 힘의 작용에 관한 모델링	
접촉의 유형과 힘의 원점	분리된 물체에의 작용
8. 중력 	질량 m인 물체의 모든 요소에 작용하는 중력의 합은 무게 $W = mg$이며, 물체의 질량중심 G를 통과해서 지구중심을 향한다. 
9. 스프링의 작용 	스프링의 힘은 스프링이 늘어나면 인장력, 압축되면 압축력이다. 선형 탄성인 스프링에서 강성 계수는 스프링의 단위 길이만큼 변형시키는 데 필요한 힘이다. 
10. 비틀림 스프링의 작용 	선형 비틀림 스프링에 대해, 작용 모멘트 M은 중립축으로부터 거리 r에 비례한다. 비틀림 강성 k_t는 스프링을 한 라디안 변형시키는 데 요구되는 모멘트이다. 

2019-03-21

Chap3

8

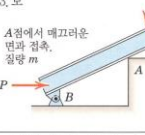
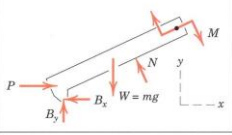
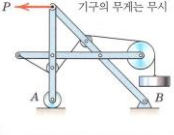
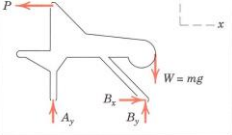
Examples of Free-Body Diagrams

자유물체도의 예	
역학적 시스템	분리된 물체의 자유물체도
1. 평면 트러스 	
2. 외팔보 	

2019-03-21

Chap3

9

자유물체도의 예	
역학적 시스템	분리된 물체의 자유물체도
3. 보 	
4. 1개의 단위로 해석하는 연결된 강체계 	

2019-03-21

Chap3

10

3/3 EQUILIBRIUM CONDITIONS

平面向量에서의 평형 조건식 (서로 독립인 3개의 평형 방정식)

$$\mathbf{R} = \Sigma \mathbf{F} = 0 \quad \mathbf{M} = \Sigma \mathbf{M} = 0 \quad (3/1)$$

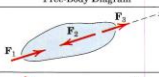
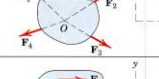
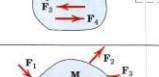
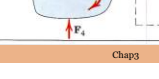
$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma M_O = 0 \quad (3/2)$$

2019-03-21

Chap3

11

Categories of Equilibrium

CATEGORIES OF EQUILIBRIUM IN TWO DIMENSIONS		
Force System	Free-Body Diagram	Independent Equations
1. Collinear		$\Sigma F_x = 0$
2. Concurrent at a point		$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma F_y = 0$
3. Parallel		$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma M_x = 0$
4. General		$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma M_x = 0$ $\Sigma F_y = 0$

2019-03-21

Chap3

12

Two- and Three-Force Members

Two-force members

2가 끝 : 크기가 같고 방향이 반대이며
(two-force member)
작용선을 공유하는 2개의 점.
(Truss 끝 처)

(a) Three-force member

(b) Closed polygon satisfies $\Sigma \mathbf{F} = 0$

2019-03-21 Chap3 13

다른 형태의 평형방정식

$\Sigma M_A = 0$ 만족

(a)

$\Sigma M_A = 0$ 만족
 $\Sigma F_x = 0$

(b)

(a) 만일 $\Sigma M_A = 0$ 인 경우, 합력 R에 의한 우력은 0이 되어야 하므로 합력 R은 A 점을 지나야 한다.

(b) 만일 $\Sigma M_A = 0$ 이고 임의의 x방향에 대하여 $\Sigma F_x = 0$ 이면, 합력 R은 A점을 지날 뿐만 아니라 x방향과 수직이어야 한다.
만일 추가로 $\Sigma M_B = 0$ 이라면, $R=0$ 이어야 한다.

→ 평형방정식의 다른 형태 $\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma M_A = 0 \quad \Sigma M_B = 0$

(점 B: x축에 수직하지 않은 직선 AB 상의 임의의 점) (점 A와 B는 x방향에 수직인 직선 상에 있지 않음)

2019-03-21 Chap3 14

$\Sigma M_A = 0$ 만족

(c)

$\Sigma M_A = 0$ 만족
 $\Sigma M_B = 0$

(d)

(c) 만일 $\Sigma M_A = 0$ 인 경우, 합력 R에 의한 우력은 0이 되어야 하므로 합력 R은 A 점을 지나야 한다.

(d) 만일 $\Sigma M_A = 0$ 이고 $\Sigma M_B = 0$ 이면, 합력 R은 A점을 지날 뿐만 아니라 반드시 B 점을 지나야 한다.
그러나 $\Sigma M_C = 0$ 을 만족하는 힘 R은 존재할 수 없다.

→ 평형방정식의 다른 형태 $\Sigma M_A = 0 \quad \Sigma M_B = 0 \quad \Sigma M_C = 0$

(점 C: 직선 AB 상에 있지 않는 임의의 점) (점 A, B, C는 동일직선 상에 놓여 있지 않는 임의의 세 점)

2019-03-21 Chap3 15

Constraints and Static Determinacy

구속(拘束, constraints)과 정정성(靜定性, static determinacy)

- 부정정성(不靜定性, static indeterminacy): 평형위치를 유지하기 위해 필요한 것보다 많은 외부의 지점이나 구속을 가지는 물체 혹은 단일체로 생각되는 요소들의 강체 결합
- 과잉, 여용 餘用(力) redundant: 물체의 평형상태를 깨지 않고 제거할 수 있는 지지점
- 內的으로 安定한 internally stable: 구조물의 주체가 어느 범위 안의 크기의 어떠한 하중의 작용을 받더라도 그 형상이 허물어지지 않을 때
- 外的으로 安定한 externally stable: 내적으로 안정한 구조물의 주체를 어느 범위 안의 크기의 어떠한 하중에도 움직이지 않게 지지했을 때
- 자유도 自由度 degrees of freedom: 발생할 수 있는 독립된 변위성분의 수효
- 일반적으로 어느 강체에 대한 독립된 평형방정식은 그 강체의 자유도와 같은 수효 만큼 세울 수 있다. *) 평면구조물: 3개

2019-03-21 Chap3 16

-반력 反力 reaction: 하중에 따라 지점에 발생하는 수동적인 적당한 힘

-外的으로 靜定한 構造物 externally statically determinate structures:
어느 구조물이 外的으로 安定하고, 이 구조물에 발생하는 反力要素의 수효와 이 구조물에 적용될 독립된 평형조건식의 수효가 같은 구조물

-外的으로 不靜定한 構造物 externally statically indeterminate structures:
독립된 평형조건식 만으로는 반력요소를 결정할 수 없는 구조물

-外的不靜定 次數 degrees of externally static indeterminacy
= 반력요소 수 - 적용가능한 독립된 평형방정식의 수

2019-03-21 Chap3 17

(a) Complete fixity
Adequate constraints

(b) Incomplete fixity
Partial constraints

(c) Incomplete fixity
Partial constraints

(d) Excessive fixity
Redundant constraint

2019-03-21 Chap3 18

내적

불안정	1차 부정정	안정	안정	안정
-----	--------	----	----	----

외적

정정	정정	정정	부정정 1차	불안정
----	----	----	--------	-----

2019-03-21 Chap3 19

2019-03-21 Chap3 20

Approach to Solving Problems

1. 已知(known: 주어진 조건)와 未知(미지)(unknown) 量(quantities) 구분
2. 自由物體圖 작성
3. 좌표축, 모멘트 中心 등의 결정
4. 물체의 평형조건을 지배하는 적용가능한 힘 및 모멘트 원리들의 설정
5. 방정식의 구성
6. 계산, 결과 검토

2019-03-21 Chap3 21

예제 3.1

원쪽 그림에서와 같이 세 가지 다른 힘이 작용하고 있는 교량트러스 결합부에 작용하는 C와 T의 힘의 크기를 구하라.

[풀이] 주어진 그림은 문제 결합부의 분리된 단면의 자유물체도를 나타내며, 평형상태에 있는 5개의 힘을 보여준다.

[풀이 I (스칼라 대수방정식)] 그림과 같이 x-y축에 대해

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 & \quad 8 + T \cos 40^\circ + C \sin 20^\circ - 16 = 0 \\ & \quad 0.766T + 0.342C = 8 \\ \sum F_y = 0 & \quad T \sin 40^\circ - C \cos 20^\circ - 3 = 0 \\ & \quad 0.643T - 0.940C = 3 \end{aligned}$$

식 (a)와 (b)의 연립방정식 해는

$$T = 9.09 \text{ kN} \quad C = 3.03 \text{ kN}$$

[풀이 II (스칼라 대수방정식)] 연립방정식을 피하기 위해, x'-y'축을 사용하여 T를 제거하기 위해 y'방향에 대한 평형식을 먼저 적용한다. 따라서

$$\begin{aligned} \sum F_{y'} = 0 & \quad -C \cos 20^\circ - 3 \cos 40^\circ - 8 \sin 40^\circ + 16 \sin 40^\circ = 0 \\ & \quad C = 3.03 \text{ kN} \\ \sum F_{x'} = 0 & \quad T + 8 \cos 40^\circ - 16 \cos 40^\circ - 3 \sin 40^\circ - 3.03 \sin 20^\circ = 0 \\ & \quad T = 9.09 \text{ kN} \end{aligned}$$

2019-03-21 Chap3 22

[풀이 III (벡터 대수방정식)] x와 y방향으로의 단위벡터 i와 j를 가지고 평형을 위한 힘의 합력이 0이 되도록 하는 벡터방정식을 만든다.

$$\sum \mathbf{F} = 0 \quad 8\mathbf{i} + (T \cos 40^\circ)\mathbf{i} + (T \sin 40^\circ)\mathbf{j} - 3\mathbf{j} + (C \sin 20^\circ)\mathbf{i} - (C \cos 20^\circ)\mathbf{j} - 16\mathbf{i} = 0$$

i와 j의 계수가 0이 되도록 각각 방정식을 풀면,

$$\begin{aligned} 8 + T \cos 40^\circ + C \sin 20^\circ - 16 &= 0 \\ T \sin 40^\circ - 3 - C \cos 20^\circ &= 0 \end{aligned}$$

이것은 물론 위에서 본 식 (a), (b)와 같다.

[풀이 IV (기하학적 풀이)] 5개의 힘이 양벡터로 표현되는 다각형이 있다. 식 (a)와 (b)는 그림에서 보여진 벡터를 x와 y방향으로 투영한 것임을 바로 알 수 있다. 마찬가지로 x와 y방향으로 투영을 하면 풀이 III과 같은 식을 얻을 수 있다.

기하학적 풀이는 쉽게 얻을 수 있다. 알고 있는 벡터는 알맞은 크기로 시계-종류를 얻

결한 후에, T와 C의 방향이 폐다각형을 만들도록 그린다. 점 P에서의 교차로 해법은 완결되며, 원하는 어떠한 정도도라도 폐다각형의 각도로부터 힘 T와 C를 계산할 수 있다.

2019-03-21 Chap3 23

예제 3.2

그림과 같이 배어진 갈량 500 kg인 도르레를 지지하는 케이블에서 장력 T를 계산하라. 도르레는 각 배어림에 대해 자유롭게 회전할 수 있으며, 각 부분의 무게는 부하의 하중에 비해 작다. 또한 도르레 C의 배어림에 작용하는 전체 힘의 크기를 구하라.

[풀이] 각 도르레의 자유물체도는 서로 상대적인 위치에 그려져 있다. 유일하게 알고 있는 힘을 포함하는 도르레 A에서 시작하자. 명시되어 있지 않은 도르레 한지름을 x로 표시하면, 중심 O에 대한 도르레 A의 수직방향의 힘 평형식은 다음과 같다.

$\sum M_O = 0$ $T_1 r - T_2 r = 0$ $T_1 = T_2$

$\sum F_y = 0$ $T_1 + T_2 - 500(9.81) = 0$ $2T_1 = 500(9.81)$ $T_1 = T_2 = 2450 \text{ N}$

도르레 A의 예로부터 도르레 B에 대한 힘 평형식을 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$T_3 = T_1 = T_2 = 2450 \text{ N}$$

도르레 C의 경우, 각도 $\theta = 30^\circ$ 는 도르레의 중심에 대한 T의 모멘트에 아무런 영향을 미치지 않으므로 모멘트 평형으로부터 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$T = T_3 \quad \text{즉} \quad T = 1226 \text{ N}$$

x와 y방향의 평형식을 적용하면 배어림에 작용하는 힘을 각각 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 & \quad 1226 \cos 30^\circ - F_x = 0 \quad F_x = 1062 \text{ N} \\ \sum F_y = 0 & \quad F_y + 1226 \sin 30^\circ - 1226 = 0 \quad F_y = 613 \text{ N} \\ [F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}] & \quad F = \sqrt{(1062)^2 + (613)^2} = 1226 \text{ N} \end{aligned}$$

2019-03-21 Chap3 24

예제 3.3

균일한 100 kg의 T형 보가 초기엔 수평 표면 위에서 보의 끝 A, B에서 물리에 의해 지지되어 있다. C점의 케이블을 사용하여 끝 B를 끝 A점으로부터 위로 3 m 위치만큼 올리려고 한다. 이때 요구되는 인장력 P와 A점에서 보의 반력, 올라간 위치에서 수평과 보에 의해 이루어지는 각도 θ 를 구하라.

[풀이] 자유물체도를 작성하는 데 있어서 A점에서의 물리에 작용하는 반력과 지중은 수직력을 얻는데 두지. 결과적으로, 다른 수평력이 없으므로 P는 수직력이어야 한다. 예제 3.2에서와 같이 케이블의 인장력 P는 C에서 보에 작용하는 인장력 P와 같음을 바로 알 수 있다.

A점에 관한 모멘트 평형식에서는 힘 P이 제거되므로 모멘트식과 그 결과는 다음과 같다.

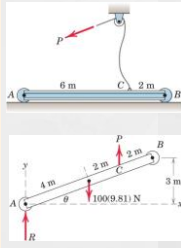
$$\circlearrowleft \sum M_A = 0 \quad P(6 \cos \theta) - 981(4 \cos \theta) = 0 \quad P = 654 \text{ N}$$

수직력의 평형으로부터

$$\uparrow \sum F_y = 0 \quad 654 + R - 981 = 0 \quad R = 327 \text{ N}$$

각도 θ 는 단지 주어진 기하학적 조건을 사용하여 결정할 수 있으며, 이는

$$\sin \theta = 3/8 \quad \theta = 22.0^\circ$$



예제 3.4

그림과 같은 지보 (30 mm)에서 지지 케이블의 인장력 T의 크기와 A지점의 편에 작용하는 힘의 크기를 구하라. 이때 보 AB는 길이가 36 kg의 질량을 가진 0.5 m T형 보 존본이다.

[대수학적 풀이] 시스템은 보의 중심을 지나는 x-y의 수직평면에 대해 대칭이다. 그 리므로 문제는 동입평면에 대한 힘계의 평형으로 해석될 수 있다. 보의 자유물체도는 2개의 직각삼분의 형으로 표현되는 A에서의 편과 함께 그림과 같이 나타내었다. 보의 무게는 $96(10^{-3})/9.81 = 4.66 \text{ kN}$ 이며, 이는 중심을 지나 작용한다. 3개의 평행방향성으로 맞추어 찾을 수 있는 마지수 A_x, A_y 와 T가 있을 때 주의하라. 평행방향성으로부터 3개의 마지수 중 2개를 소개시킬 수 있는 A점에 대한 모멘트평형성으로부터 시작하자. A점에 대한 모멘트평형성을 적용시킬 때, T로부터 A까지의 수직거리를 고려하는 것보다 T의 x와 y 성분에 의한 각각의 모멘트를 고려하는 것이 더 간단하다. 따라서 반시계방향을 양(+)으로 고려하면

$$\circlearrowleft \sum M_A = 0 \quad (T \cos 25^\circ)(0.25 + (T \sin 25^\circ)(5 - 0.12) - 19.5 - 1.5 - 0.12) - 4.66(2.5 - 0.12) = 0$$

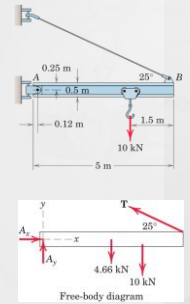
$$T = 19.61 \text{ kN}$$

x와 y방향 성분의 힘의 합이 0이 되어야 하는 관계로부터 계산하면

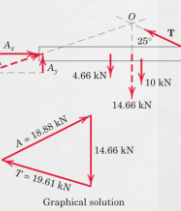
$$\uparrow \sum F_y = 0 \quad A_y - 19.61 \cos 25^\circ = 0 \quad A_y = 17.77 \text{ kN}$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0 \quad A_x + 19.61 \sin 25^\circ - 4.66 - 10 = 0 \quad A_x = 6.37 \text{ kN}$$

$$\bullet \quad A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \quad A = \sqrt{(17.77)^2 + (6.37)^2} = 18.88 \text{ kN}$$



[도식적 풀이] 평행상에서 세 힘은 항상 한 점에 모이아 한다는 원리가 도식적 풀이에 이용된다. 왼쪽 그림에서 보는 바와 같이 2개의 힘이 있고 있는 수직력 4.66 kN과 10 kN을 합한 14.66 kN의 단일합이 수직선 보의 자유물체도에 나타난 위치에서 작용하는 것으로 고려할 수 있다. 이때 작용하는 단일합의 위치는 도식적으로나 대수적으로 쉽게 구해낼 수 있다. 수직력 14.66 kN의 작용선과 마지의 장력 T의 작용선의 교점으로부터 편 반작용 A_x 가 지나야 하는 일치점(교점) O를 정의할 수 있다. 마지의 T와 A의 크기는 힘평형의 다각형을 형성하도록 힘벡터의 시작-종점을 합함으로써 구할 수 있으며, 이것은 벡터의 합이 0임을 만족해야 한다. 그림의 아랫부분에서 보는 바와 같이 기지의 수직하중이 적당한 크기로 높여 한 후에, 장력 T가 작용하는 방향을 표시하는 선이 14.66 kN 벡터의 꼬리부분을 지나도록 그린다. 이와 유사하게 자유물체도에서 힘은 한 점으로 모여 작용해야 한다는 관계로부터 편 연결된 A에서의 편이 14.66 kN의 꼬리부분을 지나도록 그린다. 벡터 T와 A를 표시하는 선의 교차하는 점의 벡터합이 0과 같도록 하는 데 필요한 T와 A의 크기를 결정한다. 이들 크기는 그림의 비로부터 결정한다. A의 x와 y의 성분은 필요한 경우 임의각에서 구할 수 있다.



B편 3차원 평형

3.4 평형조건

벡터방정식

$$\sum \mathbf{F} = 0 \quad \sum \mathbf{M} = 0$$

스칼라방정식

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum F_z = 0$$

$$\sum M_x = 0$$

$$\sum M_y = 0$$

$$\sum M_z = 0$$

→ 3차원에서 독립적인 평형방정식은 단 6개이다.

(모멘트의 평형조건은 임의의 점 O에 대한 모멘트의 합이 0임을 의미)

힘의 작용에 관한 모델링

3차원 해석에서 힘의 작용에 관한 모델링	
접촉의 유형과 힘의 현상	분리된 물체들의 작용
1. 매끄러운 평면과 접촉하는 부재 혹은 볼지지된 부재	힘은 표면에 수직이고 부재 쪽으로 향한다.
2. 거친 평면과 접촉하는 부재	수직방향 힘 N 이외에 표면에 걸리는 방향과 일치하여 부재에 작용하는 힘 P가 있을 가능성이 존재한다.
3. 원방향으로 구속된 물리나 바퀴	수직방향 힘 N 이외에 바퀴의 안쪽을 위해 작용하는 동방향 힘 P가 존재할 수 있다.

3차원 해석에서 힘의 작용에 관한 모델링	
접촉의 유형과 힘의 현상	분리된 물체들의 작용
4. 볼스켓 이용	볼 중심에 대하여 회전 자유로운 볼스켓 이용은 세 방향 성분을 가지는 힘 R_x, R_y, R_z를 지지할 수 있다.
5. 고정연결(거위맞춤 또는 용접)	세 방향 성분의 힘 이외에도 고정연결은 3개의 성분으로 나타나는 두께 M_x, M_y, M_z를 지지할 수 있다.
6. 축하중을 받는 베어링	축하중을 받는 베어링은 반지름 방향 힘 R_x와 R_y 이외에도 축방향 힘 R_z를 지지할 수 있다. 축방향 하중으로서 점의 정렬이 되기 위하여 유력 M_x와 M_y는 반드시 0으로 고려되어야 한다.

평형의 범주

3차원에서 평형의 분류		
합계	자유물체도	독립된 방정식
1. 한 점으로 모임		$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma F_y = 0$ $\Sigma F_z = 0$
2. 한 선으로 모임		$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma F_y = 0$ $\Sigma F_z = 0$ $\Sigma M_x = 0$ $\Sigma M_y = 0$ $\Sigma M_z = 0$

2019-03-21

Chap3

31

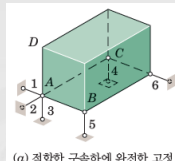
3차원에서 평형의 분류		
합계	자유물체도	독립된 방정식
3. 평행		$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma F_y = 0$ $\Sigma F_z = 0$ $\Sigma M_x = 0$ $\Sigma M_y = 0$ $\Sigma M_z = 0$
4. 일반적인 경우		$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma F_y = 0$ $\Sigma F_z = 0$ $\Sigma M_x = 0$ $\Sigma M_y = 0$ $\Sigma M_z = 0$

2019-03-21

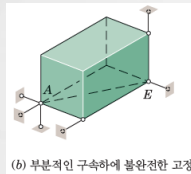
Chap3

32

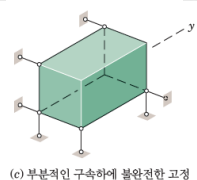
구속과 경계성



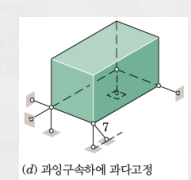
(a) 적합한 구속하에 완전한 고정



(b) 부분적인 구속하에 불완전한 고정



(c) 부분적인 구속하에 불완전한 고정



(d) 과잉구속하에 과다고정

2019-03-21

Chap3

33

예제 3.5

질량 200 kg이고 길이가 7 m인 균일한 강철 사프트가 수평이므로 A점에서 볼-소켓이음(ball-and-socket joint)에 의해 지지되고 있다. B점에서의 볼 물은 그림과 같이 예그려운 수직면에 기대 두었을 때, 벽과 마루에 의해 사프트의 끝에 작용하는 힘을 계산하라.

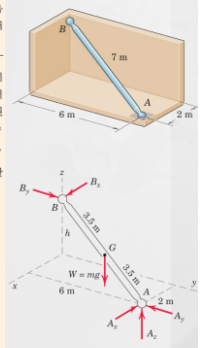
[풀이] 사프트의 자유물체도는 우선 B점에서 사프트에 작용하는 집중력이 그림과 같이 벽면에 수직으로 작용하도록 그려진다. 무게 $W = mg = (200)(9.81) = 1962 \text{ N}$ 의 무게, A점에서 마루에 의해 볼조인트에 작용하는 힘은 x, y, z 성분으로 표시한다. 이들 성분은 A가 위치한 상태에서 있어야 하므로 물리적 의미에 맞게 방향이 표시되어 있다. B의 수직 위치는 $7 = \sqrt{z^2 + 6^2 + 2^2}$ 의 관계로부터 $h = 3 \text{ m}$ 로 구해진다. 그림과 같이 오른손 좌표축이 설정되었다.

[백터법] A에서의 힘을 소거시키기 위해 모멘트 중심으로 A를 이용한다. A에 대한 모멘트를 계산하는 데 필요한 위치백터는

$$\mathbf{r}_{AB} = -1\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 1.5\mathbf{k} \text{ m} \quad \text{이고} \quad \mathbf{r}_{AB} = -2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k} \text{ m}$$

여기서 질량중심 G는 A와 B 사이의 중간에 위치한다. 백터모멘트는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Sigma \mathbf{M}_A = 0 \quad & \mathbf{r}_{AB} \times (B_x + B_z) + \mathbf{r}_{AG} \times \mathbf{W} = 0 \\ & (-1\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 1.5\mathbf{k}) \times (B_x\mathbf{i} + B_z\mathbf{j}) + (-1\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 1.5\mathbf{k}) \times (-1962\mathbf{k}) = 0 \\ & \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1.5 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -6 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1.5 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -6 & 3 \end{vmatrix} = 0 \\ & (-3B_x + 5880) + (3B_z - 1962) + (-2B_z + 6B_z) = 0 \end{aligned}$$



2019-03-21

Chap3

34

$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 의 계수가 0이 되도록 계산하여 풀면.

$$B_x = 654 \text{ N} \quad \text{이고} \quad B_z = 1962 \text{ N}$$

A에서의 힘은 다음과 같이 쉽게 구해진다.

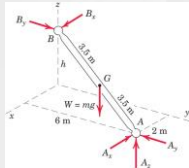
$$\begin{aligned} \Sigma \mathbf{F} = 0 \quad & (654 - A_x)\mathbf{i} + (1962 - A_y)\mathbf{j} + (-1962 + A_z)\mathbf{k} = 0 \\ & A_x = 654 \text{ N} \quad A_y = 1962 \text{ N} \quad A_z = 1962 \text{ N} \\ & A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \\ & = \sqrt{(654)^2 + (1962)^2 + (1962)^2} = 2850 \text{ N} \end{aligned}$$

[삼각법] A를 지나고 x, y 축에 평행한 각각의 축에 대해 스칼라방정식을 구하면

$$\begin{aligned} \Sigma M_{A_x} = 0 \quad & 1962(3) - 3B_z = 0 \quad B_z = 1962 \text{ N} \\ \Sigma M_{A_y} = 0 \quad & -1962(1) + 3B_x = 0 \quad B_x = 654 \text{ N} \end{aligned}$$

이와, 힘방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Sigma F_x = 0 \quad & -A_x + 654 = 0 \quad A_x = 654 \text{ N} \\ \Sigma F_y = 0 \quad & -A_y + 1962 = 0 \quad A_y = 1962 \text{ N} \\ \Sigma F_z = 0 \quad & -A_z + 1962 = 0 \quad A_z = 1962 \text{ N} \end{aligned}$$



2019-03-21

Chap3

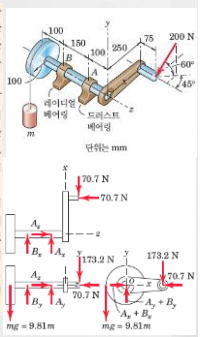
35

예제 3.6

200 N의 힘이 호이스트(hoist)의 손잡이에 그림과 같은 방향으로 가해진다. 베어링 A는 드레스드(축방향)의 힘을 지지하는 반면, 베어링 B는 오직 반지름 방향 하중(축에 수직인 하중)만을 지지한다. 지지될 수 있는 질량 m 과 각 베어링에 의해 축에 작용되는 전체 반지름 방향 힘을 구하라. 이때 베어링은 축에 수직인 축에 대한 모멘트를 지지할 수 없다고 가정한다.

[풀이] 이 시스템은 평행히 대칭성이나 대칭성을 가지지 않는 3차원 시스템으로 이 문제는 일반적인 3차원 공간의 힘으로 해석되어야 한다. 백터 표현을 사용하여 만족할 만한 해법을 얻을 수도 있지만, 이 풀이에서는 스칼라 해법을 사용하였다. 또한 단일물체로 고려될 수 있는 축, 손잡이, 드럼의 자유물체도를 3차원 공간에 그릴 수도 있지만, 여기서는 3개의 직각 부평면에 대하여 각각 표시하였다.

200 N의 힘은 세 성분으로 분해가 되고, 부평면 면에 대한 각각의 세 그림은 이 중에서 두 성분을 보여준다. A_x 와 B_x 의 정확한 방향은 두 70.7 N의 합력이 작용선이 A와 B 사이를 지나는 것을 관찰함으로써 얻을 수 있다. 힘 A_x 와 B_x 의 올바른 방향은 모멘트의 크기가 얻어질 때까지는 결정될 수 없으므로 임의로 정한다. 베어링 힘의 $x-y$ 부평면은 미지의 x 와 y 성분의 합으로 표시된다. A_z 와 무게 $W = mg$ 를 합하여 자유물체도를 완성한다. 세 그림은 각각 대응되는 힘의 성분과 관련된 3개의 2차원 문제를 표현하는 것인데 위의 해가 한다.



2019-03-21

Chap3

36

① $x-y$ 투영으로부터

$$[\Sigma M_D = 0] \quad 100(9.81\text{ m}) - 250(173.2) = 0 \quad m = 44.1 \text{ kg}$$

$x-z$ 투영으로부터

$$[\Sigma M_A = 0] \quad 150B_z + 175(70.7) - 250(70.7) = 0$$

$$[\Sigma F_x = 0] \quad A_x + 35.4 - 70.7 = 0$$

② $y-z$ 그림으로부터

$$[\Sigma M_A = 0] \quad 150B_y + 175(173.2) - 250(44.1)(9.81) = 0$$

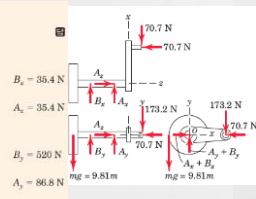
$$[\Sigma F_x = 0] \quad A_y + 520 - 173.2 - (44.1)(9.81) = 0$$

$$[\Sigma F_z = 0] \quad A_z = 70.7 \text{ N}$$

베어링에 작용하는 전체 반지름 방향의 힘은 다음과 같다.

$$[A_x = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}] \quad A_x = \sqrt{(35.4)^2 + (86.8)^2} = 93.5 \text{ N}$$

$$③ [B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2}] \quad B = \sqrt{(35.4)^2 + (520)^2} = 521 \text{ N}$$



2019-03-21

Chap3

37

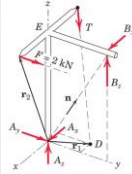
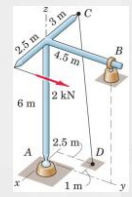
예제 3.7

용접된 관 구조물(tubular frame)이 A점의 볼-소켓에 의해 $x-y$ 수평면에 고정되어 있으며, B점의 활거울 링(locke-fitting ring)에 의해 지지되고 있다. 그림에서 보인 바와 같은 방향으로 2 kN 하중이 작용하고 있을 때, A와 B를 지나는 축에 대한 회전이 케이블 CD에 의해 지지되어 있으며, 구조물이 그림과 같은 위치에서 안정하다고 하자. 구조물의 무게는 작용하중에 비해 작으므로 무시할 때, 케이블에서의 장력 T, 평에서의 반력 및 A 점에서의 반력성분을 구하라.

[해설] 이 시스템은 대칭선이나 대칭면이 없는 3차원 시스템이므로, 이 문제는 일반 3차원 공간의 힘계로 해석되어야 한다. 자유물체도는 힘의 반력이 두 성분의 합으로 표시되도록 그려진다. T를 제외한 모든 미지력은 A와 B를 지나는 선에 대한 모멘트합을

① 위함으로써 소거될 수 있다. AB 방향은 단위벡터 $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{6^2 + 4.5^2}}(4.5\mathbf{j} + 6\mathbf{k}) = \frac{1}{5}(3\mathbf{j} + 4\mathbf{k})$ 에 의해 정해진다. AB에 대한 T의 모멘트는 점 A에 대한 벡터모멘트 AB 방향의 성분이며, $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}$ 과 같다. 마찬가지로, AB에 대한 작용하중 F의 모멘트는 $\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ 이다. CD는 46.2 m이므로 T, F, $\mathbf{r}_1$ 과 $\mathbf{r}_2$ 에 대한 표현식을 쓰면

$$\mathbf{T} = \frac{T}{\sqrt{46.2}}(2\mathbf{i} + 2.5\mathbf{j} - 6\mathbf{k}) \quad \mathbf{F} = 2\mathbf{j} \text{ kN}$$



2019-03-21

Chap3

38

$$\mathbf{r}_1 = -1 + 2.5\mathbf{j} \quad \mathbf{r}_2 = 2.5\mathbf{j} + 6\mathbf{k} \text{ m}$$

이에 모멘트방정식은 다음과 같이 된다.

$$[\Sigma M_{AB} = 0] \quad (-1 + 2.5\mathbf{j}) \times \frac{T}{\sqrt{46.2}}(2\mathbf{i} + 2.5\mathbf{j} - 6\mathbf{k}) \cdot \frac{1}{5}(3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) + (2.5\mathbf{j} + 6\mathbf{k}) \times (2\mathbf{j}) \cdot \frac{1}{5}(3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) = 0$$

벡터 연산이 끝나면

$$\frac{-48T}{\sqrt{46.2}} + 20 = 0 \quad T = 2.83 \text{ kN}$$

이고, T의 성분은 다음과 같다.

$$T_x = 0.833 \text{ kN} \quad T_y = 1.042 \text{ kN} \quad T_z = -2.50 \text{ kN}$$

다음의 모멘트와 힘의 합에 의해 남은 미지력을 구하면 다음과 같다.

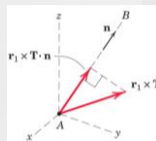
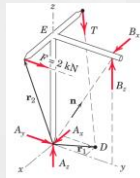
$$[\Sigma M_x = 0] \quad 2(2.5) - 4.5B_z - 1.042(3) = 0 \quad B_z = 0.417 \text{ kN}$$

$$[\Sigma M_y = 0] \quad 4.5B_x - 2(6) - 1.042(6) = 0 \quad B_x = 4.06 \text{ kN}$$

$$[\Sigma F_x = 0] \quad A_x + 0.417 + 0.833 = 0 \quad A_x = -1.250 \text{ kN}$$

$$③ [\Sigma F_y = 0] \quad A_y + 2 + 1.042 = 0 \quad A_y = -3.04 \text{ kN}$$

$$[\Sigma F_z = 0] \quad A_z + 4.06 - 2.50 = 0 \quad A_z = -1.556 \text{ kN}$$



2019-03-21

Chap3

39