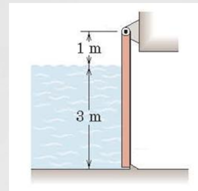
Area Moments of Inertia

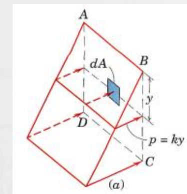
A

APPENDIX OUTLINE

A/1 Introduction

정수압이 작용하는 경우 AB축에 관한 힘의 모멘트의 계산





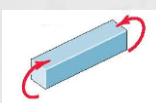
표면적 ABCD는 세기가 축 AB로 부터 거리 y에 비례하는 분포 압력 p를 받는다.

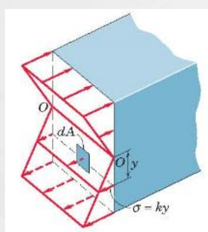
미소면적요소에 작용하는 힘 $p\,dA = k\,y\,dA$

이 힘에 의한 AB축에 대한 모멘트 $(p\,dA)y = k\,y^2\,dA$

이 수압의 AB축에 대한 총모멘트 $M = k\int y^2\,dA$

보의 양 단부에 크기가 같고 방향이 반대인 우력이 작용하는 경우 O-O축에 대한 모멘트의 계산



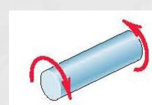


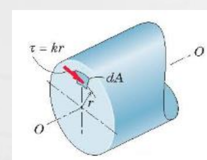
축 O-O의 위쪽은 압축, 아래쪽은 인장을 받는다.

O-O축에 대한 미소모멘트 $dM = y(\sigma\,dA) = k\,y^2\,dA$

O-O축에 대한 총모멘트 $M = k\int y^2\,dA$

비틂모멘트를 받는 원형단면 축의 중심 축에 대한 모멘트의 계산





전단응력의 분포는 중심축으로부터의 거리에 비례한다.

미소요소에 작용하는 전단응력 $\tau = kr$

중심축에 대한 총모멘트 $M = \int r(\tau\,dA) = k\int r^2\,dA$

힘의 강도(强度, 壓力, 應力)가 모멘트 축으로부터 힘까지의 거리에 비례하는 경우 모멘트 크기의 계산에서 나타나는 항

$\int(\text{거리})^2\,dA$

면적 2차 모멘트(second moment of area)

단면2차모멘트

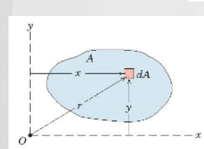
면적의 관성모멘트(moment of Inertia)

$\int(\text{거리})\ dA \quad \Leftarrow \quad \bar{x}A = \int x_c\,dA$

면적 1차 모멘트(first moment of area)

A/2 Definitions

직각 및 극 관성모멘트 **Rectangular and Polar Moments of Inertia**



$$I_x = \int y^2\,dA \qquad I_y = \int x^2\,dA \qquad \text{(A/1)}$$

$$I_z = \int r^2\,dA \qquad \text{(A/2)}$$

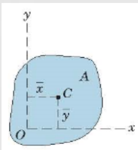
$x^2 + y^2 = r^2$ 이므로

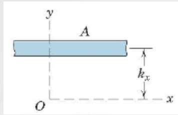
$$I_z = I_x + I_y \qquad \text{(A/3)}$$

차원

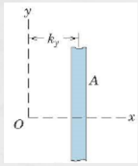
L^4 ; m^4 , mm^4 , $in.^4$, ft^4

회전 반경, 회전반지름 Radius of Gyration

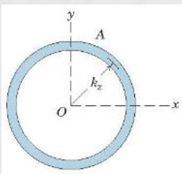




$I_x = k_x^2 A$ or $k_x = \sqrt{I_x/A}$



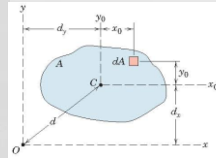
$I_y = k_y^2 A$ or $k_y = \sqrt{I_y/A}$



$I_z = k_z^2 A$ or $k_z = \sqrt{I_z/A}$

$$k_z^2 = k_x^2 + k_y^2 \qquad \textbf{(A/5)}$$

축의 이동 Transfer of Axes



C : 단면의 도심

도심축에 평행한 x 축에 대한 관성모멘트

x 축에 대한 요소 dA의 관성모멘트는

$$dI_x = (y_0 + d_x)^2\, dA$$

$$I_x = \int y_0^2\, dA + 2d_x \int y_0\, dA + d_x^2 \int dA$$

$\bar{I}_x$, $\bar{I}_y$, $\bar{I}_z$: 도심축에 대한 면적2차모멘트

$$I_x = \bar{I}_x + Ad_x^2 \qquad I_y = \bar{I}_y + Ad_y^2 \qquad \textbf{(A/6)}$$

평행축 정리 parallel-axes theorem

$$I_z = \bar{I}_z + Ad^2 \qquad \textbf{(A/6a)}$$

$$k^2 = \bar{k}^2 + d^2 \qquad \textbf{(A/6b)}$$

예제 A.1

직사각형 면적의 관성모멘트를 도심을 지나는 x_0축과 y_0축, 도심 C점을 지나고 면에 수직한 z_0축, x축 그리고 O점을 지나는 수직한 z축에 대하여 구하라.

|풀이| x_0축에 대한 관성모멘트 $\bar{I}_x$를 계산하기 위하여 면적이 $b\,dy$인 수평띠를 선택하면 띠의 모든 요소들은 같은 y좌표값을 갖는다. 따라서

$$[I_x = \int y^2\, dA] \qquad \bar{I}_x = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b\, dy = \frac{1}{12}bh^3$$ 답

이다. 기호들을 바꿈으로써 도심을 지나는 y_0축에 대한 관성모멘트는

$$\bar{I}_y = \frac{1}{12}hb^3$$ 답

이다. 도심에 대한 극관성모멘트는

$$[\bar{I}_z = \bar{I}_x + \bar{I}_y] \qquad \bar{I}_z = \frac{1}{12}(bh^3 + hb^3) = \frac{1}{12}A(b^2 + h^2)$$ 답

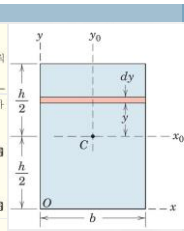
이다. 평행축정리에 의하여 x축에 대한 관성모멘트는

$$[I_x = \bar{I}_x + Ad_x^2] \qquad I_x = \frac{1}{12}bh^3 + bh\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}bh^3 = \frac{1}{3}Ah^2$$ 답

이다. 또한 평행축정리에 의해서 O점에 대한 극관성모멘트는 다음과 같이 된다.

$$[I_z = \bar{I}_z + Ad^2] \qquad I_z = \frac{1}{12}A(b^2 + h^2) + A\left[\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2\right]$$

$$I_z = \frac{1}{3}A(b^2 + h^2)$$ 답



예제 A.2

삼각형 면적의 관성모멘트를 밑변과 도심 및 꼭지점을 지나는 수평한 축에 대하여 구하라.

|풀이| 밑변에 평행한 면적 띠를 그림에서 보는 바와 같이 선정하면, 그 띠의 면적은 $dA = x\,dy = [(h-y)b/h]\,dy$이다. 정의에 의하여

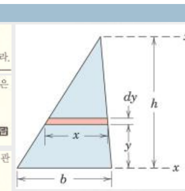
$$[I_x = \int y^2\, dA] \qquad I_x = \int_0^h y^2 \frac{h-y}{h} b\, dy = b\left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4h}\right]_0^h = \frac{bh^3}{12}$$ 답

으로 된다. 평행축정리에 의하여 x축 위로 $h/3$의 거리에 있는 도심을 지나는 축에 대한 관성모멘트 $\bar{I}$는

$$[\bar{I} = I - Ad^2] \qquad \bar{I} = \frac{bh^3}{12} - \left(\frac{bh}{2}\right)\left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{bh^3}{36}$$ 답

이다. 도심축으로부터 꼭지점을 지나는 x'축으로 이동하면 다음과 같다.

$$[I = \bar{I} + Ad^2] \qquad I_{x'} = \frac{bh^3}{36} + \left(\frac{bh}{2}\right)\left(\frac{2h}{3}\right)^2 = \frac{bh^3}{4}$$ 답



예제 A.3

원의 면적 관성모멘트를 수평한 지름축과 중심을 지나고 면에 수직한 축에 대하여 계산하고, 회전반지름을 구하라.

|풀이| 링의 모든 요소는 O점으로부터 등거리에 있으므로 O점을 지나고 면에 수직한 z축에 대한 관성모멘트를 계산하기 위하여 원환의 미소 면적요소를 사용한다. 이 요소의 면적은 $dA = 2\pi r_0\, dr_0$이다. 따라서

$$[I_z = \int r^2\, dA] \qquad I_z = \int_0^r r_0^2 (2\pi r_0\, dr_0) = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{1}{2}Ar^2$$ 답

이다. 극 회전반지름은

$$\left[k = \sqrt{\frac{I}{A}}\right] \qquad k_z = \frac{r}{\sqrt{2}}$$ 답

이다.

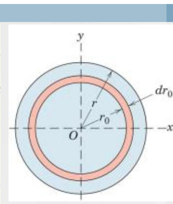
대칭성에 의하여 $I_x = I_y$이므로 식 (A.3)으로부터

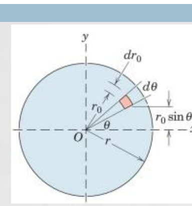
$$[I_z = I_x + I_y] \qquad I_x = \frac{1}{2}I_z = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{1}{4}Ar^2$$ 답

이다. 지름축에 대한 회전반지름은

$$\left[k = \sqrt{\frac{I}{A}}\right] \qquad k_x = \frac{r}{2}$$ 답

이다.





앞에서의 I_x 계산은 가장 간단한 방법이다. 이 결과는 아래쪽 그림에서 보는 바와 같이 면적요소 $dA = r_0\, dr_0\, d\theta$를 사용하여 직접 적분에 의해서도 구할 수 있다.

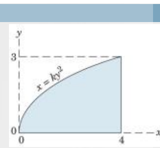
$$[I_x = \int y^2\, dA] \qquad I_x = \int_0^{2\pi}\int_0^r (r_0 \sin\theta)^2 r_0\, dr_0\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{r^4 \sin^2\theta}{4}\, d\theta$$

$$= \frac{r^4}{4}\frac{1}{2}\left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi r^4}{4}$$ 답

예제 A.4

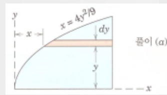
포물선 아래 면적의 관성모멘트를 x축에 대하여 구하라. (a) 수평 면적 띠와 (b) 수직 면적 띠를 사용하여 해석하라.



|풀이| 먼저 포물선의 식에 $x=4$와 $y=3$을 대입하여 상수 $k=4/9$를 얻는다.

(a) 수평띠. 수평띠의 모든 부분은 x축으로부터 같은 거리에 있으므로 x축에 대한 띠의 관성모멘트는 $y^2\,dA$이고, $dA=(4-x)\,dy=4(1-y^2/9)\,dy$이다. y에 관하여 적분하면 다음과 같다.

$$\left[I_x = \int y^2\,dA\right] \qquad I_x = \int_0^3 4y^2\left(1-\frac{y^2}{9}\right)dy = \frac{72}{5} = 14.4\ (\text{units})^4$$ 답

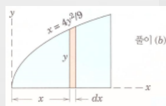


(b) 수직띠. 여기서는 요소의 모든 부분이 x축으로부터의 거리가 다르므로 사각형 요소의 밑변에 대한 요소의 관성모멘트에 대한 정확한 식을 사용해야 하는데, 이는 예제 A.1로부터 $bh^3/3$이다. 폭 dx와 높이 y에 대한 식은

$$dI_x = \tfrac{1}{3}(dx)y^3$$

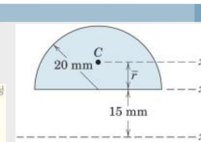
이 된다. x에 관하여 적분하려면 y를 x의 항으로 나타내야 하는데, $y = 3\sqrt{x}/2$이므로 이를 대입하여 적분하면 다음과 같다.

$$I_x = \frac{1}{3}\int_0^4 \left(\frac{3\sqrt{x}}{2}\right)^3 dx = \frac{72}{5} = 14.4\ (\text{units})^4$$ 답



예제 A.5

반원 면적의 x 축에 대한 관성모멘트를 구하라.



|풀이| 반원 면적의 x'축에 대한 관성모멘트는 같은 축에 대한 완전한 원형 면적 관성모멘트의 절반이다. 따라서 예제 A.3의 결과로부터

$$I_{x'} = \frac{1}{2}\frac{\pi r^4}{4} = \frac{20^4\pi}{8} = 2\pi(10^4)\ \text{mm}^4$$

이다. 다음에 평행한 도심축 x_0에 대한 관성모멘트 $\bar{I}$를 얻는다. 평행축정리에 의하여 x'축을 거리 $\bar{r}=4r/(3\pi)=(4)(20)/(3\pi)=80/(3\pi)$ mm만큼 도심축까지 평행 이동시킨다. 그러므로 다음과 같다.

$$[\bar{I} = I - Ad^2] \qquad \bar{I} = 2(10^4)\pi - \left(\frac{20^2\pi}{2}\right)\left(\frac{80}{3\pi}\right)^2 = 1.755(10^4)\ \text{mm}^4$$

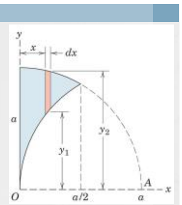
마지막으로, x_0 도심축을 x축으로 평행 이동시킨다. 따라서 다음이 된다.

$$[I = \bar{I} + Ad^2] \qquad I_x = 1.755(10^4) + \left(\frac{20^2\pi}{2}\right)\left(15+\frac{80}{3\pi}\right)^2$$
$$= 1.755(10^4) + 34.7(10^4) = 36.4(10^4)\ \text{mm}^4$$ 답

이 문제는 x'이나 x축이 면적의 도심 C를 지나지 않기 때문에 축이동을 두 번 해야 한다는 것을 알아야 한다. 만일 도심이 x'축 상에 있는 완전한 원이라면 단 한 번의 이동만이 필요할 것이다.

예제 A.6

y축과 각각의 중심이 O와 A이고 반지름이 a인 두 원호로 둘러싸인 면적의 x축에 대한 관성모멘트를 계산하라.



|풀이| 수직한 미소면적 띠를 선택함으로써 전체 면적을 나타내는 데 한 번의 적분으로 가능하다. 수평띠는 불연속으로 인하여 y에 대하여 두 번의 적분이 필요하다. x축에 대한 띠의 관성모멘트는 높이 y_2인 띠의 관성모멘트에서 높이 y_1인 띠의 관성모멘트를 뺀 것이다. 따라서 예제 A.1의 결과로부터

$$dI_x = \tfrac{1}{3}(y_2\,dx)y_2^{\,2} - \tfrac{1}{3}(y_1\,dx)y_1^{\,2} = \tfrac{1}{3}(y_2^{\,3} - y_1^{\,3})\,dx$$

와 같이 쓸 수 있다.

y_2와 y_1의 값은 두 곡선의 방정식 $x^2+y_2^2=a^2$과 $(x-a)^2+y_1^2=a^2$으로부터 $y_2=\sqrt{a^2-x^2}$과 $y_1=\sqrt{a^2-(x-a)^2}$ 값을 각각 얻는다. 따라서

$$I_x = \frac{1}{3}\int_0^{a/2}\left\{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2} - [a^2-(x-a)^2]\sqrt{a^2-(x-a)^2}\right\}dx$$

이다. 두 원 방정식의 연립해는 두 곡선의 x좌표 교차점으로 주어지며, 그 값은 $a/2$이다. 적분값은

$$\int_0^{a/2} a^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{a^4}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$$
$$-\int_0^{a/2} x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{a^4}{16}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$-\int_0^{a/2} a^2\sqrt{a^2-(x-a)^2}\,dx = \frac{a^4}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$\int_0^{a/2} (x-a)^2\sqrt{a^2-(x-a)^2}\,dx = \frac{a^4}{8}\left(\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{\pi}{3}\right)$$

로 주어진다. 계수가 1/3이므로 적분값들을 합하면

$$I_x = \frac{a^4}{96}(9\sqrt{3}-2\pi) = 0.0969a^4$$ 답

으로 주어진다. 만일 2차 요소 $dA=dx\,dy$를 사용한다면 x축에 대한 요소의 관성모멘트는 $y^2dx\,dy$가 될 것이다. 수직한 띠에 대하여 x를 상수로 하여 y_1에서 y_2까지 적분하면

$$dI_x = \left[\int_{y_1}^{y_2} y^2\,dy\right]dx = \tfrac{1}{3}(y_2^{\,3}-y_1^{\,3})\,dx$$

가 되고, 이것은 직사각형에 대한 관성모멘트의 결과식으로부터 표현한 식이다.

A/3 Composite Areas 조합 면적, 조합 단면

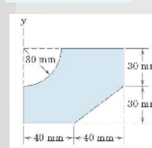
기본적인 도형들의 성질들(A, I 등) +평행축 정리

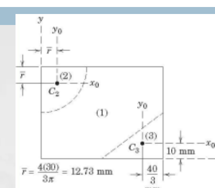
Part	Area, A	d_x	d_y	$Ad_x^{\,2}$	$Ad_y^{\,2}$	$\bar{I}_x$	$\bar{I}_y$
Sums	ΣA			$\Sigma Ad_x^{\,2}$	$\Sigma Ad_y^{\,2}$	$\Sigma\bar{I}_x$	$\Sigma\bar{I}_y$

$$I_x = \Sigma\bar{I}_x + \Sigma Ad_x^{\,2}$$
$$I_y = \Sigma\bar{I}_y + \Sigma Ad_y^{\,2}$$

주어진 축에 대한 조합 면적의 각 부분의 관성모멘트는 더할 수 있지만, 그들의 회전 반경은 더할 수 없다.

SAMPLE PROBLEM A/7

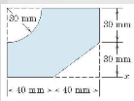


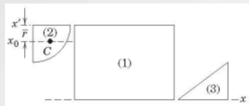


PART	A mm²	d_x mm	d_y mm	$Ad_x^{\,2}$ mm³	$Ad_y^{\,2}$ mm³	$\bar{I}_x$ mm⁴	$\bar{I}_y$ mm⁴
1	$80(60)$	30	40	$4.32(10^6)$	$7.68(10^6)$	$\frac{1}{12}(80)(60)^3$	$\frac{1}{12}(60)(80)^3$
2	$-\frac{1}{4}\pi(30)^2$	$(60-12.73)$	12.73	$-1.579(10^6)$	$-0.1146(10^6)$	$-\left(\frac{\pi}{16}-\frac{4}{9\pi}\right)30^4$	$-\left(\frac{\pi}{16}-\frac{4}{9\pi}\right)30^4$
3	$-\frac{1}{2}(40)(30)$	$\frac{30}{3}$	$\left(80-\frac{40}{3}\right)$	$-0.06(10^6)$	$-2.67(10^6)$	$-\frac{1}{36}40(30)^3$	$-\frac{1}{36}(30)(40)^3$
TOTALS	3490			$2.68(10^6)$	$4.90(10^6)$	$1.366(10^6)$	$2.46(10^6)$

$$[I_x = \Sigma\bar{I}_x + \Sigma Ad_x^{\,2}] \qquad I_x = 1.366(10^6) + 2.68(10^6) = 4.05(10^6)\ \text{mm}^4 \qquad \textit{Ans.}$$
$$[I_y = \Sigma\bar{I}_y + \Sigma Ad_y^{\,2}] \qquad I_y = 2.46(10^6) + 4.90(10^6) = 7.36(10^6)\ \text{mm}^4 \qquad \textit{Ans.}$$

SAMPLE PROBLEM A/8





$I_x = \frac{1}{3}Ah^2 = \frac{1}{3}(80)(60)(60)^2 = 5.76(10^6)\ \text{mm}^4$ — x축에 대한 면적 (1)

$I_{x'} = -\frac{1}{4}\left(\frac{\pi r^4}{4}\right) = -\frac{\pi}{16}(30)^4 = -0.1590(10^6)\ \text{mm}^4$ — x'축에 대한 면적 (2)

$[\bar{I} = I - Ad^2]$ $\quad \bar{I}_x = -0.1590(10^6) - \left[-\frac{\pi(30)^2}{4}(12.73)^2\right] = -0.0445(10^6)\ \text{mm}^4$ — 면적 (2)의 도심축에 대하여

$[I = \bar{I} + Ad^2]$ $\quad I_x = -0.0445(10^6) + \left[-\frac{\pi(30)^2}{4}\right](60 - 12.73)^2 = -1.624(10^6)\ \text{mm}^4$ — 면적 (2)의 x축에 대하여

$I_x = -\frac{1}{12}bh^3 = -\frac{1}{12}(40)(30)^3 = -0.90(10^6)\ \text{mm}^4$ — 면적 (3)의 밑변에 대하여

$I_x = 5.76(10^6) - 1.624(10^6) - 0.09(10^6) = 4.05(10^6)\ \text{mm}^4$ *Ans.* — x축에 대한 총 관성모멘트

The net area of the figure is $A = 60(80) - \frac{1}{4}\pi(30)^2 - \frac{1}{2}(40)(30) = 3490\ \text{mm}^2$ so that the radius of gyration about the x-axis is

$k_x = \sqrt{I_x/A} = \sqrt{4.05(10^6)/3490} = 34.0\ \text{mm}$ *Ans.*

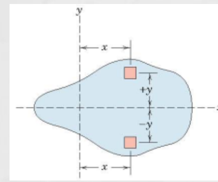
A/4 Products of Inertia and Rotation of Axes 관성 상승모멘트와 축의 회전

Definition

$$I_{xy} = \int xy\, dA \qquad \text{(A/7)}$$

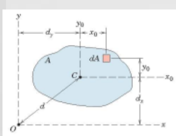
비대칭 단면을 포함하는 문제와 회전된 축에 대한 관성모멘트의 계산에서 양(+), 음(−), 0 등의 값을 가질 수 있다(관성모멘트는 항상 양(+)의 값을 가짐)

기준축 중의 하나가 대칭축일 때 관성 상승모멘트는 항상 0이다.



경사진 축에 대한 면적 관성모멘트를 계산할 필요가 있을 때 유용하다.

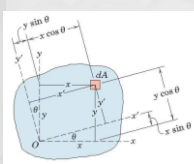
Transfer of Axes 축의 이동



$$I_{xy} = \int (x_0 + d_y)(y_0 + d_x)\, dA$$
$$= \int x_0 y_0\, dA + d_x \int x_0\, dA + d_y \int y_0\, dA + d_x d_y \int dA$$

$$I_{xy} = \bar{I}_{xy} + d_x d_y A \qquad \text{(A/8)}$$

Rotation of Axes 축의 회전



$$I_{x'} = \int y'^2\, dA = \int (y\cos\theta - x\sin\theta)^2\, dA$$
$$I_{y'} = \int x'^2\, dA = \int (y\sin\theta + x\cos\theta)^2\, dA$$

$$\sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \qquad \cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

와 I_x , I_y , I_{xy}에 대한 정의를 대입하고 전개하면

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta - I_{xy}\sin 2\theta$$
$$I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta + I_{xy}\sin 2\theta \qquad \text{(A/9)}$$

같은 방법으로 경사진 축에 대한 관성 상승모멘트를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$I_{x'y'} = \int x'y'\, dA = \int (y\sin\theta + x\cos\theta)(y\cos\theta - x\sin\theta)\, dA$$

$$\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta \qquad \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$$

와 I_x , I_y , I_{xy}에 대한 정의를 대입하고 전개하면

$$I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2}\sin 2\theta + I_{xy}\cos 2\theta \qquad \text{(A/9a)}$$

식(A.9)를 더하면 $I_{x'} + I_{y'} = I_x + I_y = I_z$가 되고,

이는 O점에 대한 극관성모멘트인 (A.3)과 일치

$I_{x'}, I_{y'}$의 극값

$$\frac{dI_{x'}}{d\theta} = (I_y - I_x)\sin 2\theta - 2I_{xy}\cos 2\theta = 0 \implies \tan 2\alpha = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x} \qquad \text{(A/10)}$$

이식(A.10)은 $\tan 2\alpha = \tan(2\alpha + \pi)$이므로 π만큼의 차이가 나는 2개의 2α 값이 주어진다. 결과적으로 α에 대한 2개의 해는 $\pi/2$만큼 차이가 있다.

이들 중의 하나의 값은 최대의 관성모멘트의 축을 정의하고, 다른 하나의 값은 최소 관성모멘트의 축을 정의한다.

그 두 직각축을 관성의 주축(principal axes of inertia)라고 한다.

$$I_{max} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4{I_{xy}}^2}$$
$$I_{min} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4{I_{xy}}^2} \qquad \text{(A/11)}$$