중등교육연구
2018, 66(3), 901-935

평면 테셀레이션에 대한 대수적 고찰*

정영우**(울산대)·김부윤***·유현기(부산대)·
김도영(한국과학영재학교)·조하현(남산중)

<요 약>

학교수학에서 다루어지는 테셀레이션에 관한 내용은 주로 기하학적 관점의 결과론적인 내용이 많다. 그러나 기하학적인 관점은 어떻게 해서 그 도형의 모양과 사용 개수가 결정되었는지, 과연 그것이 모든 경우인지에 대한 답을 주지 못한다. 따라서 본 연구에서는 대수적 관점에서 테셀레이션의 기본요소를 설정하고, 각 경우에 대한 명제를 학교수학의 수준에서 정당화하였다. 이러한 과정에서 테셀레이션의 정의와 테셀레이션이 되기 위한 조건을 엄밀화 하였으며, 일반적으로 말해지는 결과들이 과정적 결과를 말하고 있지 않음을 보였다. 또한 일부 명제에 대한 새로운 증명법을 고안하였다. 이러한 활동은 수학적 개념에 대한 "Make Math" 과정을 이해하는 소재로서의 가치를 가진다.

주요어: 테셀레이션, 정당화, 대수적 관점, Make Math

* 이 과제는 부산대학교 기본연구지원사업(2년)에 의하여 연구되었음.
* 본 논문은 2017년 부산대학교 과학영재교육원 사사반 과정에서 연구한 내용을 대폭 수정·보완하고, 심화 발전시킨 것임.
** 제1저자, young38woo@hanmail.net
*** 교신저자, kimby@pusan.ac.kr

Ⅰ. 연구의 배경 및 필요성

2015년 8월 18일, 새로운 수학적 발견에 관한 기사가 각 신문마다 게재되었다. 기사의 내용은 평면 테셀레이션(Tessellation)이 가능한 15번째의 오각형이 발견되었다는 것이었다. 일부 기사에서는 이러한 발견이 수학사에 남을 업적[1)] 이라고까지 평가하였다.

학교수학에서 테셀레이션은 단위도형을 가지고 기본 조작을 반복적으로 사용하여 평면이나 공간을 메우는 과정에 대한 고찰과 그 결과물(패턴)의 조화로움 또는 아름다움을 주제로 하는 경우가 많다. 그러나 테셀레이션의 또 다른 가치는 '효율성(경제성)'과 '안정성'이며, 이는 주로 구조의 관점에서 의의를 가진다. 예를 들어, 화학물질의 구조 등 안정성을 추구하는 구조의 연구에 있어 중요한 개념이 된다[2)]. 그러한 이유로 평면 테셀레이션이 가능한 15번째 오각형의 발견은 수학뿐만 아니라 생활이나 각종 산업 및 과학 분야에 새로운 가능성을 열어 준다는 가치를 가진다.

한편 학교수학에서의 지도 내용을 살펴보면, 평면 테셀레이션에 대한 결과적인 사실만을 제시하고 있을 뿐 그에 대한 증명 과정이나 이유를 설명하고 있는 것은 거의 없다. 더구나 이들 내용은 대부분 기하학적인 관점에서 접근하고 있다. 학교수학과 관련한 연구 내용도 기하학적인 것이 대부분으로, 정다각형의 테셀레이션이나 에셔의 작품을 활용하는 등의 학생활동에 관한 것이 많았다(계영희, 2005; 백선수·김원경, 2007; 박현미·강신포·김성준, 2007; 계영희·김종민, 2008; 임해경 박은영, 2002; 김남균, 2004). 그러다보니 왜 그런 도형을 왜 그만큼 사용하게 되었는지는 알 수 없으며, 따라서 사고의 과정이나 수학적 엄밀성이 결여되어 있다. 또한 대수적으로 고찰하고 있는 경우(빈지현, 2015; 신원국, 2009; 이순희, 2004; 전영아, 2000)도 논의가 개괄적으로 주어지고 있으며, 비정다각형의 테셀레이션은 정당화 없이 결과만을 제시하고 있다. 특히 정다각형과 준정다각형을 이용한 평면 테셀레이션을 연구하고, 가장 많은

1) http://nownews.seoul.co.kr/news/newsView.php?id=20150818601008
2) http://cafe.daum.net/mindstay/oYjm/510?q=%ED%8E%9C%EB%A1%9C%EC%A6%88%ED%83%80%EC%9D%BC%EB%A7%81

대수적 계산을 한 빈지현(2015)의 연구에서도 테셀레이션이 되는 경우의 정당화에만 주력하고 있어 테셀레이션이 되지 않는 경우의 정당화에 대해서는 간과하고 있다. 예를 들어, 변 위에 오는 경우를 단순히 다루지 않는다고 서술한다거나 합동인 도형만을 사용하고 한 점에 모이는 개수와 규칙이 동일한 경우만 다루고 있다. 즉, 테셀레이션을 이루는 모든 요소들과 경우의 수를 체계적으로 고찰하고 있지 않다. 또한 배열에 관해서는 기하학적으로 제시하고 있다.

따라서 본 연구에서는 이런 연구들을 재탐구하며, 나아가 관련된 다른 명제들에 대해서 그러한 결과가 나오게 된 과정을 대수적으로 탐구하고 정당화한다.

이러한 연구는 결과가 아닌 과정에 가치를 두고 결과적 지식이 아닌 그 지식의 형성과정을 수학적으로 고찰하는 것으로, 결과에 가려진 본질적 내용을 발견적으로 경험할 수 있는 “Make Math” 활동으로서의 가치를 가진다.

본 연구에서는 다음과 같이 연구 과제를 설정한다.

1. 테셀레이션에 대한 이론 탐구를 통해 기존 정의와 조건의 한계점을 밝혀 평면 테셀레이션을 위한 조건을 엄밀화한다.
2. 이를 바탕으로 고려요소를 선정하고, 각 경우에 대해 대수적으로 탐구하여 정당화한다.

Ⅱ. 연구내용 및 결과

1. 평면 테셀레이션에 관한 이론적 고찰

가. 평면 테셀레이션의 정의와 조건

평면 테셀레이션은 같은 모양의 조각들을 서로 겹치거나 틈이 생기지 않게 늘어놓아 평면이나 공간을 덮는 것[3]이다. 그러므로 한 점에 모이는 도형의 내

3) http://terms.naver.com/entry.nhn?docId=3340698&cid=55642&categoryId=55642

각들의 합이 360°이어야 한다. 단, 사용되는 도형은 볼록다각형인 경우만 대상으로 한다. 그리고 평면 테셀레이션에서의 조작 방법은 평행이동, 회전이동, 대칭이동을 기본 조작으로 하여, 이들의 합성에 의해 모두 17가지의 방법이 있다[4]. 하지만 본 연구에서 조작 방법은 고려하지 않기로 한다. 어떤 조작을 하든 과정적 차이일 뿐 평면 테셀레이션이 되는 경우를 탐구하는데 있어서는 이 방법을 벗어나지 않으며, 또한 본 연구의 논의를 벗어나기 때문이다.

따라서 평면 테셀레이션에 관한 이론적 고찰에서 얻은 평면 테셀레이션의 정의와 조건을 정리하면 다음과 같다.

정의. 같은 모양의 조각(단위도형)들을 서로 겹치거나 틈이 생기지 않게 늘어놓아 평면을 메우는 것을 평면 테셀레이션이라 한다.

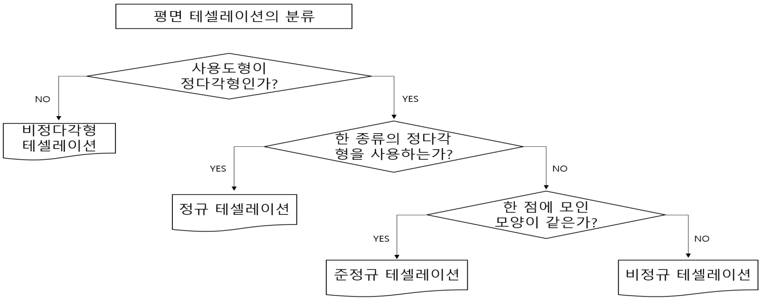
조건. 한 점에 모이는 도형의 내각들의 합이 360°이어야 한다. 단, 사용되는 도형은 볼록다각형인 경우만으로 한정한다.

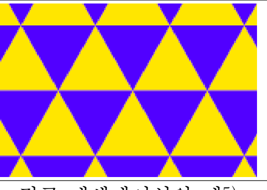
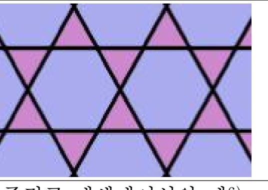
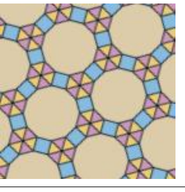
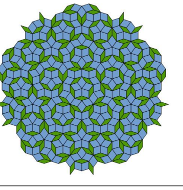
나. 평면 테셀레이션의 종류

평면 테셀레이션은 먼저 사용하는 도형의 모양에 따라 분류할 수 있다. 비정다각형을 사용하는 경우는 비정다각형 테셀레이션이다. 정다각형을 사용하는 경우는 사용하는 정다각형의 개수에 따라서 다시 분류할 수 있다. 한 종류의 정다각형을 사용하는 경우는 정규 테셀레이션이다. 두 종류 이상의 정다각형을 사용하는 경우는 각각의 꼭짓점에 정다각형들이 모이는 모양에 따라 또다시 분류할 수 있다. 이 중 각 꼭짓점에 모이는 모양이 모두 같은 경우를 준정규 테셀레이션이라고 한다. 그리고 각각의 꼭짓점에 모이는 모양이 여러 개일 경우를 비정규 테셀레이션이라 한다.

---

4) 자세한 내용은 杉原厚吉, 2011 참고.



	
정규 테셀레이션의 예5)	준정규 테셀레이션의 예6)
	
비정규 테셀레이션의 예(정다각형)7)	비정규 테셀레이션의 예 (펜로즈 타일; 비정다각형)8)

[그림 1] 평면 테셀레이션의 분류와 예시

5) http://wiki.mathnt.net/index.php?title=%EC%9C%A0%ED%81%B4%EB%A6%AC%EB%93%9C__%ED%8F%89%EB%A9%B4__%ED%85%8C%EC%85%80%EB%A0%88%EC%9D%B4%EC%85%98

6) http://wiki.mathnt.net/index.php?title=%EC%9C%A0%ED%81%B4%EB%A6%AC%EB%93%9C__%ED%8F%89%EB%A9%B4__%ED%85%8C%EC%85%80%EB%A0%88%EC%9D%B4%EC%85%98

7) http://wiki.mathnt.net/index.php?title=%EC%9C%A0%ED%81%B4%EB%A6%AC%EB%93%9C__%ED%8F%89%EB%A9%B4__%ED%85%8C%EC%85%80%EB%A0%88%EC%9D%B4%EC%85%98

8) http://wiki.mathnt.net/index.php?title=%EC%9C%A0%ED%81%B4%EB%A6%AC%EB%93%9C_%ED%8F%89%EB%A9%B4_%ED%85%8C%EC%85%80%EB%A0%88%EC%9D%B4%EC%85%98

2. 대수적 탐구

앞의 평면 테셀레이션의 분류에는 다음과 같은 경우의 논의가 빠져 있다.

① 종류는 같지만 크기가 다른(닮음인) 도형을 사용하는 경우

② 변 위에 꼭짓점이 놓이는 경우

따라서 본 연구에서는 이러한 요소까지 고려하여 평면 테셀레이션에 대해 총체적으로 고찰한다. 그런데 대수적 고찰에 의해서는 임의의 꼭짓점에 대해 사용되는 도형의 모양과 개수만이 정해지게 된다. 따라서 이들을 배열할 때 각 점에 모이는 상태(패턴)를 이차적으로 판단할 필요가 있다.

그리고 이러한 요소를 고려하면 모양이 다른 도형을 여러 개 사용하거나 닮음인 도형을 사용하는 경우, 그리고 변 위에 다른 도형의 꼭짓점이 오는 경우도 있으므로 앞에서 주어진 평면 테셀레이션의 정의는 수정이 필요하다. 따라서 평면 테셀레이션의 정의와 조건을 다음과 같이 수정한다.

수정된 정의. 단위도형들을 사용하여 서로 겹치거나 틈이 생기지 않게 평면을 메우는 것을 평면 테셀레이션이라 한다.

수정된 조건. 한 점에 모이는 도형의 내각의 합이 360°이거나 변 위의 한 점에 모인 도형의 내각의 합이 180°이어야 한다. 단, 사용되는 도형은 볼록다각형만이다.

1) 평면 테셀레이션 구성의 고려 요소와 경우의 수

평면을 빈틈없이 메우기 위해서는 사용하는 도형의 모양, 사용하는 서로 다른 도형의 개수, 사용하는 도형의 크기, 모으는 방법, 모인 상태, 채우는 차원까지도 고려해야 한다. 본 연구에서는 평면 테셀레이션 구성의 고려 요소를 ① 사용하는 도형의 모양, ② 사용하는 서로 다른 도형의 개수, ③ 사용하는 도형의 크기, ④ 모으는 방법의 네 가지로 설정한다, 모인 상태(패턴)는 테셀레이

션이 되는 대상 도형과 사용 개수를 대수적으로 구하고 난 이후의 논의이므로 고려 요소에는 넣지 않으며, 테셀레이션의 실행 단계에서 고려하기로 한다.

먼저, 사용되는 도형의 모양으로는 정다각형과 비정다각형을 생각할 수 있다. 그리고 사용되는 서로 다른 단위도형의 개수는 1개, 2개, 3개, 4개 이상(정다각형의 경우, 각기 다른 도형들을 사용하여 평면 테셀레이션을 만들 때는 4개를 초과할 수 없으므로)인 경우로 나눌 수 있다. 사용되는 도형의 크기는 같은 크기나 다른 크기로 나눌 수 있으며, 이때 모양은 닮음인 것으로 한다. 또한 모으는 방법은 한 꼭짓점에 도형을 모으거나 변 위에 꼭짓점이 놓이는 방법이 있다.

〈표 1〉 평면 테셀레이션 구성의 고려 요소

단위도형의 모양	**서로 다른 단위도형의 개수**
정다각형, 비정다각형	1개, 2개, 3개, 4개 이상
사용하는 도형의 크기	**모으는 방법**
합동, 닮음	한 점, 변 위

따라서 총 경우의 수는 $2\times4\times2\times2=32$(가지)이다. 32가지 경우의 수는 다음과 같다.

〈사용 도형이 정다각형인 경우〉

① 정다각형 1개 종류로, 합동인 도형만 사용해 한 점에 모이게 하는 경우
② 정다각형 1개 종류로, 합동인 도형만 사용하되 변 위에 점들이 오는 경우
③ 정다각형 1개 종류로, 닮음인 도형을 사용해 한 점에 모이게 하는 경우
④ 정다각형 1개 종류로, 닮음인 도형을 사용하되 변 위에 점들이 오는 경우
⑤ 정다각형 2개 종류로, 합동인 도형만 사용해 한 점에 모이게 하는 경우
⑥ 정다각형 2개 종류로, 합동인 도형만 사용하되 변 위에 점들이 오는 경우
⑦ 정다각형 2개 종류로, 닮음인 도형을 사용해 한 점에 모이게 하는 경우
⑧ 정다각형 2개 종류로, 닮음인 도형을 사용하되 변 위에 점들이 오는 경우
⑨ 정다각형 3개 종류로, 합동인 도형만 사용해 한 점에 모이게 하는 경우

⑩ 정다각형 3개 종류로, 합동인 도형만 사용하되 변 위에 점들이 오는 경우
⑪ 정다각형 3개 종류로, 닮음인 도형을 사용해 한 점에 모이게 하는 경우
⑫ 정다각형 3개 종류로, 닮음인 도형을 사용하되 변 위에 점들이 오는 경우
⑬ 정다각형 $n(n \geq 4)$개 종류로, 합동인 도형만 사용해 한 점에 모이게 하는 경우
⑭ 정다각형 $n(n \geq 4)$개 종류로, 합동인 도형만 사용하되 변 위에 점들이 오는 경우
⑮ 정다각형 $n(n \geq 4)$개 종류로, 닮음인 도형을 사용해 한 점에 모이게 하는 경우
⑯ 정다각형 $n(n \geq 4)$개 종류로, 닮음인 도형을 사용하되 변 위에 점들이 오는 경우

〈사용 도형이 비정다각형인 경우〉

① 비정다각형 1개 종류로, 합동인 도형만 사용해 한 점에 모이게 하는 경우
② 비정다각형 1개 종류로, 합동인 도형만 사용하되 변 위에 점들이 오는 경우
③ 비정다각형 1개 종류로, 닮음인 도형을 사용해 한 점에 모이게 하는 경우
④ 비정다각형 1개 종류로, 닮음인 도형을 사용하되 변 위에 점들이 오는 경우
⑤ 비정다각형 2개 종류로, 합동인 도형만 사용해 한 점에 모이게 하는 경우
⑥ 비정다각형 2개 종류로, 합동인 도형만 사용하되 변 위에 점들이 오는 경우
⑦ 비정다각형 2개 종류로, 닮음인 도형을 사용해 한 점에 모이게 하는 경우
⑧ 비정다각형 2개 종류로, 닮음인 도형을 사용하되 변 위에 점들이 오는 경우
⑨ 비정다각형 3개 종류로, 합동인 도형만 사용해 한 점에 모이게 하는 경우
⑩ 비정다각형 3개 종류로, 합동인 도형만 사용하되 변 위에 점들이 오는 경우
⑪ 비정다각형 3개 종류로, 닮음인 도형을 사용해 한 점에 모이게 하는 경우

⑫ 비정다각형 3개 종류로, 닮음인 도형을 사용하되 변 위에 점들이 오는 경우
⑬ 비정다각형 $n(n \geq 4)$개 종류로, 합동인 도형만 사용해 한 점에 모이게 하는 경우
⑭ 비정다각형 $n(n \geq 4)$개 종류로, 합동인 도형만 사용하되 변 위에 점들이 오는 경우
⑮ 비정다각형 $n(n \geq 4)$개 종류로, 닮음인 도형을 사용해 한 점에 모이게 하는 경우
⑯ 비정다각형 $n(n \geq 4)$개 종류로, 닮음인 도형을 사용하되 변 위에 점들이 오는 경우

2) 대수적 고찰9)

평면 테셀레이션 구성의 요소를 고려하였을 때 총 32가지 경우가 있었다. 이들 각 경우에 대해 평면 테셀레이션이 되는 구체적 조건들을 대수적으로 검토한 결과는 다음과 같다.

〈사용 도형이 정다각형인 경우〉

명제 ① 정다각형 1개 종류로, 합동인 도형만 사용해 한 점에 모이게 하는 평면 테셀레이션은 3가지뿐이다.

증명. 정m각형$(m \geq 3)$의 한 내각의 크기는 $\dfrac{180^\circ(m-2)}{m}$이다. 한 꼭짓점에 n개의 내각이 모인다고 하면 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$\frac{180^\circ(m-2)}{m} \times n = 360^\circ \; (m \geq 3)$$

9) 각 명제의 증명은 모두 연구자들이 직접 증명한 것이다. 다만 정다각형인 경우의 명제①, ⑤, ⑨는 여러 연구에서 유사한 증명이 제시되었다. 그러나 본 연구와 같이 평면 테셀레이션의 요소와 경우의 수를 나눈 것이 아니어서 논증의 아이디어와 서술과정에는 차이가 있다.

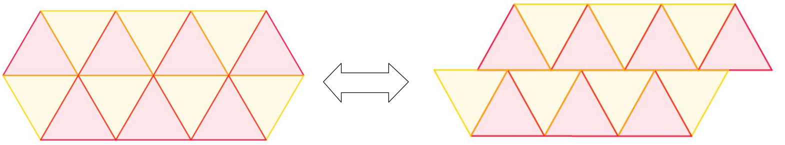
$$\frac{180^\circ m - 360^\circ}{m} \times n = 360^\circ \ (m \geq 3)$$

$$360^\circ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m}\right) n = 360^\circ \ (m \geq 3)$$

이므로 $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m}\right) n = 1$이다. 이때 $m \geq 3$이므로 $\frac{1}{m} \leq \frac{1}{3}$이고, 따라서 $n \leq 6$이다. 그러므로 $n = 3, 4, 5, 6$이고, $n = 3$일 때 $m = 6$, $n = 4$일 때 $m = 4$, $n = 5$일 때 $m = \frac{10}{3}$, $n = 6$일 때 $m = 3$이다. 그런데 m은 정수이므로 $n = 5$인 경우는 성립하지 않는다. 따라서 합동인 정삼각형, 정사각형, 정육각형인 경우만 각각의 반복적인 사용으로 평면을 메울 수 있다.

명제 ② 정다각형 1개 종류로, 합동인 도형만 사용하되 변 위에 점들이 오는 평면 테셀레이션은 없다.

증명. 정다각형 1개 종류를 사용하고 변 위에 점들이 오는 경우는 두 가지로 나누어 생각할 수 있다. 먼저 명제 ①에서 테셀레이션이 가능했던 것 중 평행이동에 의해 한 꼭짓점을 다른 단위도형의 변 위로 이동시켜 테셀레이션 하는 경우이다. 이 경우는 삼각형, 사각형으로 평면 테셀레이션이 가능하며, 육각형으로는 평면 테셀레이션이 불가능하다. 그러나 가능한 경우라도 평행이동이 연속적으로 이루어지므로 무한의 경우가 존재하여 대수적으로는 의미가 없다. 그 외 다른 정다각형을 사용하여 테셀레이션을 하는 경우는 정삼각형이나 정사각형처럼 일부 영역이 두 평행선 사이를 메우도록 놓을 수 없으므로 테셀레이션이 불가능하다. 왜냐하면 변 위에 점이 놓이므로 직선(변)이 아닌 부분의 내각의 합이 180°이어야 한다. 즉, 그러한 정m다각형의 한 내각을 α°, 모인 도형의 개수를 n이라 하면 $n \times \alpha^\circ = n\left\{\frac{m-2}{m} \times 180^\circ\right\} = 180^\circ$ (단, m, n은 자연수)이어야 한다. 그런데 이러한 자연수 m, n은 존재하지 않는다.



[그림 2] 명제 ②의 예

이러한 논의는 〈사용 도형이 정다각형인 경우〉의 ⑧, ⑫, ⑯, 〈사용 도형이 비정다각형인 경우〉의 ④, ⑧, ⑫인 경우에도 마찬가지이다.

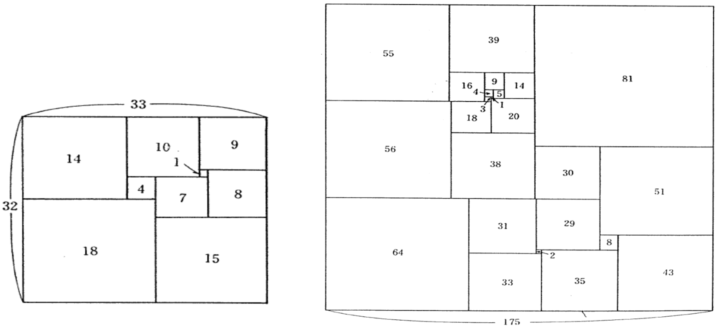
명제 ③ 정다각형 1개 종류로, 닮음인 도형을 사용해 한 점에 모이게 하는 평면 테셀레이션은 없다.

증명. 한 변의 길이가 각각 a, b, c, $\cdots$인 정m각형으로 평면 테셀레이션이 가능하다고 하자. 그러면 한 점에 닮음인 모든 정m각형의 내각이 모여야 한다. 하지만 인접한 두 도형의 경우 변의 길이가 다르므로 반드시 변 위에 한 점이 놓이게 된다. 따라서 조건을 만족하는 평면 테셀레이션은 불가능하다.

그리고 〈사용 도형이 정다각형인 경우〉의 ⑦, ⑪, ⑮도 같은 이유로 평면 테셀레이션이 불가능하다.

진술 ④ 정다각형 1개 종류로, 닮음인 도형을 사용하되 변 위에 점들이 오는 경우는 현재 2가지가 알려져 있으며, 총 몇 가지인지는 알려져 있지 않다.

이 문제는 길이의 닮음비를 패턴화할 수 없다. 따라서 대수적으로 고찰할 수 없다. 그러나 이것은 기하적인 관점에서 '루진(Luzin)의 문제'로 수학자들에 의해서 연구되고 있다.



[그림 3] 루진의 문제의 예(吉田稔 외, 1989)

> **명제** ⑤ 정다각형 2개 종류로, 합동인 도형만 사용해 한 점에 모이게 하는 평면 테셀레이션은 5가지뿐이다.

증명. 우선, 정a각형, 정b각형$(b \geq a \geq 3)$이 각각 m개, n개$(m+n \geq 3)$가 한 점에 모이는 테셀레이션이 가능하다고 하자. 정a각형과 정b각형의 내각은 모두 $60°$보다 크거나 같으므로 정삼각형만 붙인다고 하더라도 6개를 초과해서 붙일 수 없으며, 정a각형과 정b각형 모두 정삼각형일 수도 없다. 따라서 정a각형과 정b각형을 합쳐서 한 꼭짓점에 6개 이상 모을 수 없다. 그러므로 한 점에 모이는 정다각형의 개수는 3개, 4개, 5개인 경우뿐이다.

ⅰ) 한 점에 3개의 정다각형이 모이는 경우[10]

이 경우 $3 \leq a \leq b \leq c$라 하면, $\dfrac{180°(a-2)}{a}+\dfrac{180°(b-2)}{b}+\dfrac{180°(c-2)}{c}=360°$를 만족해야 한다. 즉, $360°(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{a})+360°(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{b})+360°(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{c})=360°$이고, $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{c}=1$이다. 이때 $\dfrac{3}{a} \geq \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{2}$이므로 $3 \leq a \leq 6$이고, 따라서 $a=3,\ 4,\ 5,\ 6$이다.

---

10) 한 점에 정a각형, 정b각형, 정c각형이 모이는 경우를 $(a,\ b,\ c)$로 표기하기로 하자(단, $a,\ b,\ c$가 모두 동시에 같을 수는 없지만 일부는 중복하여 사용할 수 있다). 이후 이 표기법은 동일하게 확장된다.

$a=3$이면, $\frac{2}{b} \geq \frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{6}$이므로 $6<b \leq 12$이고, $b=7, 8, 9, 10, 11, 12$이다. $b=7$일 때 $c=42$, $b=8$일 때 $c=24$, $b=9$일 때 $c=18$, $b=10$일 때 $c=15$, $b=11$일 때 $c=\frac{66}{5}$, $b=12$일 때 $c=12$이다. 그런데 a, b, c는 정수이고, 사용 도형의 종류는 두 가지이므로 가능한 것은 (3, 12, 12) 하나뿐이다.

$a=4$이면, $\frac{2}{b} \geq \frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{4}$이므로 $4<b \leq 8$이고, $b=5, 6, 7, 8$이다. $b=5$일 때 $c=20$, $b=6$일 때 $c=12$, $b=7$일 때 $c=\frac{28}{3}$, $b=8$일 때 $c=8$이고, 이 중 가능한 것은 (4, 8, 8) 하나뿐이다.

$a=5$이면, $\frac{2}{b} \geq \frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{3}{10}$이므로 $5 \leq b<\frac{20}{3}$이고, $b=5, 6$이다. $b=5$일 때 $c=10$, $b=6$일 때 $c=\frac{15}{2}$이고, 이 중 가능한 것은 (5, 5, 10) 하나뿐이다.

$a=6$이면, $\frac{2}{b} \geq \frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{3}$이므로 $3<b \leq 6$이고, $b=4, 5, 6$이다. $b=4$일 때 $c=12$, $b=5$일 때 $c=\frac{15}{2}$, $b=6$일 때 $c=6$이어서, 이 중 가능한 것은 (6, 6, 6)이지만 조건에 맞지 않는다.

ⅱ) 한 점에 4개의 정다각형이 모이는 경우

이 경우 $\frac{180^{\circ}(a-2)}{a}+\frac{180^{\circ}(b-2)}{b}+\frac{180^{\circ}(c-2)}{c}+\frac{180^{\circ}(d-2)}{d}=360^{\circ}$ $(3 \leq a \leq b \leq c \leq d)$를 만족해야 한다. 따라서 $360^{\circ}(\frac{1}{2}-\frac{1}{a})+360^{\circ}(\frac{1}{2}-\frac{1}{b})+360^{\circ}(\frac{1}{2}-\frac{1}{c})+360^{\circ}(\frac{1}{2}-\frac{1}{d})=360^{\circ}$이고, 따라서 $\frac{1}{2}-\frac{1}{a}+\frac{1}{2}-\frac{1}{b}+\frac{1}{2}-\frac{1}{c}+\frac{1}{2}-\frac{1}{d}=1$이다. 이때 $\frac{4}{a} \geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1$이므로 $3 \leq a \leq 4$이고, 따라서 $a=3, 4$이다.

$a=3$이면, $\frac{3}{b} \geq \frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{2}{3}$이므로 $3 \leq b<\frac{9}{2}$이고, $b=3, 4$이다. $b=3$

일 때, $\frac{2}{c} \geq \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{1}{3}$이므로 $3 < c \leq 6$이고, $c=4, 5, 6$이다. $c=4$일 때 $d=12$, $c=5$일 때 $d=\frac{15}{2}$, $c=6$일 때 $d=6$이며, 이 중 가능한 것은 $(3, 3, 6, 6)$ 하나뿐이다. $b=4$일 때, $\frac{2}{c} \geq \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{5}{12}$이므로 $4 \leq c \leq \frac{24}{5}$이고, 따라서 $c=4$, $d=6$인데, 이때는 $(3, 3, 4, 6)$으로 한 점에 세 종류가 모이게 되어 조건에 위배된다.

$a=4$이면, $\frac{3}{b} \geq \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{3}{4}$이므로 $4 \leq b \leq 4$이어서 $b=4$이고, $\frac{2}{c} \geq \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{1}{2}$이므로 $4 \leq c \leq 4$이어서 $c=4$이고, 이 때, $d=4$이므로 $(4, 4, 4, 4)$가 되어 조건에 위배된다.

iii) 한 점에 5개의 정다각형이 모이는 경우

$$\frac{180^\circ(a-2)}{a} + \frac{180^\circ(b-2)}{b} + \frac{180^\circ(c-2)}{c} + \frac{180^\circ(d-2)}{d} + \frac{180^\circ(e-2)}{e} = 360^\circ$$

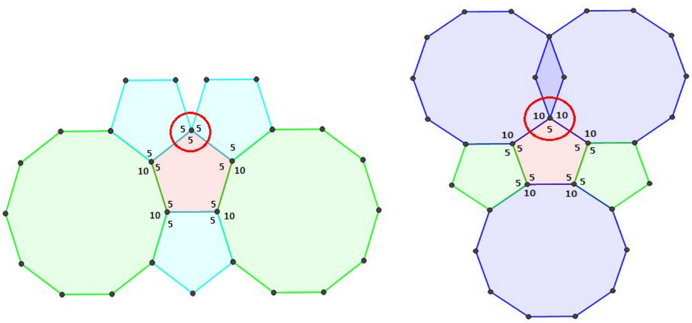
(단, $3 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq e$)를 만족해야 하므로 $\frac{1}{2} - \frac{1}{a} + \frac{1}{2} - \frac{1}{b} + \frac{1}{2} - \frac{1}{c} + \frac{1}{2} - \frac{1}{d} + \frac{1}{2} - \frac{1}{e} = 1$이다. $\frac{5}{a} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} = \frac{3}{2}$이므로 $3 \leq a < \frac{10}{3}$이고, $a=3$이다. 또한 $\frac{4}{b} \geq \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} = \frac{7}{6}$이므로 $3 \leq b < \frac{24}{7}$이고, $b=3$이다. 그리고 $\frac{3}{c} \geq \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} = \frac{5}{6}$이므로 $3 \leq c < \frac{18}{5}$이고, $c=3$이다. 마찬가지로 $\frac{2}{d} \geq \frac{1}{d} + \frac{1}{e} = \frac{1}{2}$이므로 $3 \leq d \leq 4$이고, 따라서 $d=3, 4$이다. $d=3$일 때 $e=6$, $d=4$일 때 $e=4$이므로, 이때 가능한 것은 $(3, 3, 3, 3, 6)$, $(3, 3, 3, 4, 4)$ 두 가지뿐이다.

결과적으로 $(3, 12, 12)$, $(4, 8, 8)$, $(5, 5, 10)$, $(3, 3, 6, 6)$, $(3, 3, 3, 3, 6)$, $(3, 3, 3, 4, 4)$의 총 6가지 방법으로 평면을 메울 수 있다.

그런데 이 대수적 방법에 의한 계산 결과는 사용되는 도형의 모양과 각 도형의 사용 개수에 대한 것만을 지정하고 있을 뿐 이들 단위도형들을 배열하는

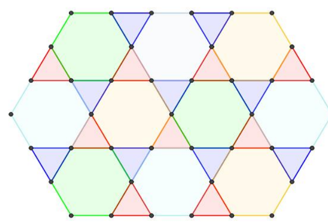
방법에 대한 정보를 가지고 있지 않다. 예를 들어, (3, 3, 6, 6)과 (3, 6, 3, 6)은 대수적으로는 같으나 배열하는 방법을 고려하면 한 점에 모이는 모양이 다를 수 있다. 따라서 배열 방법(모인상태)에 대한 고찰이 필요하다.

(5, 5, 10)은 임의의 한 점에 정오각형 2개와 정10각형 1개가 모여야 한다. 이때, 정오각형을 기준으로 생각하면, 다른 정오각형과 정10각형이 첫 번째 놓은 정오각형의 둘레를 돌아가며 배치되어야 한다. 하지만 정오각형의 변은 5개이므로 반드시 어느 하나의 도형이 다른 것보다 1개 많아지게 되어 정오각형 3개, 또는 정오각형 1개와 정10각형 2개가 놓이는 점이 반드시 존재한다. 두 경우 모두 세 각의 합이 $108^\circ \times 3 = 324^\circ$, $108^\circ + 144^\circ \times 2 = 396^\circ$로 360°가 되지 않으므로 (5, 5, 10)으로는 평면 테셀레이션이 불가능하다.



[그림 4] (5, 5, 10) 불가능성

한편, (3, 3, 6, 6)의 경우는 (3, 3, 6, 6)과 (3, 6, 3, 6)의 두 가지 패턴을 만들 수 있으나, (3, 3, 6, 6)의 경우는 임의의 한 점에 정삼각형 2개와 정육각형 2개가 모여야 한다. 이 경우는 내각의 합이 360°가 되므로 앞의 방법으로 판단할 수 없다. 관점을 바꾸어 패턴을 생각한다. 먼저 정삼각형을 기준으로 생각하여 삼각형이 변을 마주하며



[그림 5] (3, 6, 3, 6)
정규테셀레이션

하나가 와야 하며 나머지 두 변에 정육각형 2개가 와야 한다. 그러면 마지막 놓은 정육각형과 처음 정삼각형 사이에 정삼각형이 와야 하는데 이 경우는 정삼각형이 3개 인접하게 되어 조건에 맞지 않는다. 반면 (3, 6, 3, 6)은 정규 테셀레이션이 가능하다. 그 외 나머지 경우는 모두 앞과 같은 방법으로 평면 테셀레이션, 나아가 정규 테셀레이션임을 알 수 있다.

> **명제 ⑥** 정다각형 2개 종류로, 합동인 도형만 사용하되 변 위에 점들이 오는 평면 테셀레이션은 없다.

증명.

i) 하나의 정다각형의 변 위에 이와 다른 정다각형 하나가 와서 180°가 되는 경우는 존재하지 않는다.

ii) 하나의 정다각형의 변 위에 정다각형의 두 꼭짓점이 모이는 경우, 즉, 하나의 정다각형의 변 위에 정m각형, 정n각형 $(m, n \geq 3)$이 모인다고 하면 $\frac{m-2}{m} \times 180^\circ + \frac{n-2}{n} \times 180^\circ = 180^\circ$를 만족해야 한다. 즉, $\frac{m-2}{m} + \frac{n-2}{n} = 1$이고, $\frac{n-2}{n} = 1 - \frac{m-2}{m}$이므로 $\frac{n-2}{n} = \frac{2}{m}$이다. 한편 $\frac{2}{m} \leq \frac{2}{3}$이므로 $\frac{1}{3} \leq \frac{n-2}{n} \leq \frac{2}{3}$이고, $1 \leq \frac{3n-6}{n} \leq 2$이므로 $3 \leq n \leq 6$이고, $n=3, 4, 5, 6$이다. $n=3$이면 $m=6$, $n=4$이면 $m=4$, $n=5$이면 $m=\frac{10}{3}$, $n=6$이면 $m=3$인데, m과 n은 자연수이고, (3, 6)과 (6, 3)은 같은 경우이므로 (3, 6), (4, 4)의 2가지가 있다. 정삼각형과 정육각형을 붙인 것은 본질적으로 명제 ⑤의 (3, 3, 6, 6)과 같다. 그리고 정사각형 2개를 붙인 것은 명제 ⑤의 (3, 3, 3, 4, 4)와 본질적으로 같다.

iii) 하나의 정다각형의 변 위에 정다각형의 세 꼭짓점이 모이는 경우로는 정삼각형 3개가 놓이는 경우가 있다. 이 경우는 앞의 (3, 3, 3, 4, 4)의 경우와 본질적으로 같다.

iv) 하나의 정다각형의 변 위에 정다각형의 네 꼭짓점이 모이는 경우는 존

재하지 않는다.

명제 ⑨ 정다각형 3개 종류로, 합동인 도형만 사용해 한 점에 모이게 하는 평면 테셀레이션은 2가지뿐이다.

증명. 정a각형, 정b각형$(b \geq a \geq 3)$을 각각 m개, n개$(m+n \geq 3)$ 사용하여 평면 테셀레이션이 가능하다고 하자. 정a각형과 정b각형의 내각은 모두 60°보다 크거나 같다. 그런데 정삼각형만 붙인다고 하더라도 6개를 초과해서 붙일 수 없고, 정a각형과 정b각형 모두 정삼각형일 수 없으며 적어도 하나는 그보다 크므로 정a각형과 정b각형을 합쳐서 한 꼭짓점에 6개 이상 모을 수 없다. 따라서 한 점에 모이는 정다각형의 개수를 3개, 4개, 5개인 경우로 나누어 생각할 수 있다.

i) 한 점에 3개의 정다각형이 모이는 경우

$\frac{180^\circ(a-2)}{a}+\frac{180^\circ(b-2)}{b}+\frac{180^\circ(c-2)}{c}=360^\circ\ (3 \leq a \leq b \leq c)$를 만족해야 한다. 따라서 $360^\circ(\frac{1}{2}-\frac{1}{a})+360^\circ(\frac{1}{2}-\frac{1}{b})+360^\circ(\frac{1}{2}-\frac{1}{c})=360^\circ$이고, $\frac{1}{2}-\frac{1}{a}+\frac{1}{2}-\frac{1}{b}+\frac{1}{2}-\frac{1}{c}=1$이다. 한편 $\frac{3}{a} \geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2}$이므로 $3 \leq a \leq 6$이고, $a=3, 4, 5, 6$이다.

$a=3$이면, $\frac{2}{b} \geq \frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{6}$이므로 $6<b \leq 12$이고, $b=7, 8, 9, 10, 11, 12$이다. $b=7$일 때 $c=42$, $b=8$일 때 $c=24$, $b=9$일 때 $c=18$, $b=10$일 때 $c=15$, $b=11$일 때 $c=\frac{66}{5}$, $b=12$일 때 $c=12$이고, 이 중 조건에 맞는 것은 $(3, 7, 42)$, $(3, 8, 24)$, $(3, 9, 18)$, $(3, 10, 15)$이다.

$a=4$이면, $\frac{2}{b} \geq \frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{4}$이므로 $4<b \leq 8$이고, 따라서 $b=5, 6, 7, 8$이다. $b=5$일 때 $c=20$, $b=6$일 때 $c=12$, $b=7$일 때 $c=\frac{28}{3}$, $b=8$일 때 $c=8$이고, 이 중 조건에 맞는 것은 $(4, 5, 20)$, $(4, 6, 12)$이다.

$a=5$이면, $\frac{2}{b} \geq \frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{3}{10}$이므로 $5 \leq b<\frac{20}{3}$이고, 따라서 $b=5, 6$이다.

$b=5$일 때 $c=10$, $b=6$일 때 $c=\frac{15}{2}$이어서 조건을 만족하는 경우는 없다.

$a=6$이면, $\frac{2}{b} \geq \frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{3}$이므로 $3<b \leq 6$이고, $b=4, 5, 6$이다. $b=4$일 때 $c=12$, $b=5$일 때 $c=\frac{15}{2}$, $b=6$일 때 $c=6$이어서, 조건을 만족하는 경우는 없다.

ii) 한 점에 4개의 정다각형이 모이는 경우

이 경우 $\frac{180^{\circ}(a-2)}{a}+\frac{180^{\circ}(b-2)}{b}+\frac{180^{\circ}(c-2)}{c}+\frac{180^{\circ}(d-2)}{d}=360^{\circ}$ $(3 \leq a \leq b \leq c \leq d)$를 만족해야 한다. 따라서 $\frac{1}{2}-\frac{1}{a}+\frac{1}{2}-\frac{1}{b}+\frac{1}{2}-\frac{1}{c}+\frac{1}{2}-\frac{1}{d}=1$이다. 이때 $\frac{4}{a} \geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1$이므로 $3 \leq a \leq 4$이고, 따라서 $a=3, 4$이다.

$a=3$이면, $\frac{3}{b} \geq \frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{2}{3}$이므로 $3 \leq b<\frac{9}{2}$이고, $b=3, 4$이다. 또한 $b=3$일 때 $\frac{2}{c} \geq \frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{1}{3}$이어서 $3<c \leq 6$이고, $c=4, 5, 6$이다. 그리고 $c=4$일 때 $d=12$, $c=5$일 때 $d=\frac{15}{2}$, $c=6$일 때 $d=6$이어서, 가능한 경우는 $(3, 3, 4, 12)$뿐이다. 마찬가지로 $b=4$일 때 $\frac{2}{c} \geq \frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{5}{12}$이므로 $4 \leq c<\frac{24}{5}$이어서 $c=4$이고, $d=6$이다. 이때 가능한 경우는 $(3, 4, 4, 6)$뿐이다.

$a=4$이면, $\frac{3}{b} \geq \frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{3}{4}$이므로 $4 \leq b \leq 4$이다. 따라서 $b=4$이다. 그리고 $\frac{2}{c} \geq \frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{1}{2}$이므로 $4 \leq c \leq 4$이어서 $c=4$이고, 이때 $d=4$이다. 따라서 조건을 만족하는 경우는 없다.

iii) 한 점에 5개의 정다각형이 모이는 경우

이 경우 $3 \le a \le b \le c \le d \le e$라 할 때, $\frac{180^\circ(a-2)}{a}+\frac{180^\circ(b-2)}{b}+\frac{180^\circ(c-2)}{c}+\frac{180^\circ(d-2)}{d}+\frac{180^\circ(e-2)}{e}=360^\circ$를 만족해야 한다. 정리하면 $\frac{1}{2}-\frac{1}{a}+\frac{1}{2}-\frac{1}{b}+\frac{1}{2}-\frac{1}{c}+\frac{1}{2}-\frac{1}{d}+\frac{1}{2}-\frac{1}{e}=1$이다. 이 때, $\frac{5}{a} \ge \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}=\frac{3}{2}$이고, $3 \le a < \frac{10}{3}$이어서 $a=3$이다. 그러면 $\frac{4}{d} \ge \frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}=\frac{7}{6}$이므로 $3 \le b < \frac{24}{7}$이고, $b=3$이다. 한편 $\frac{3}{c} \ge \frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}=\frac{5}{6}$이므로 $3 \le c < \frac{18}{5}$이고, $c=3$이다. $\frac{2}{d} \ge \frac{1}{d}+\frac{1}{e}=\frac{1}{2}$이므로 $3 \le d \le 4$이고, $d=3, 4$이다. 또한 $d=3$일 때 $e=6$, $d=4$일 때 $e=4$이어서, 조건을 만족하는 경우는 없다.

따라서 (3, 7, 42), (3, 8, 24), (3, 9, 18), (3, 10, 15), (4, 6, 12), (4, 5, 20), (3, 3, 4, 12), (3, 4, 4, 6)인 경우만 평면 테셀레이션이 가능하다.

이제 배열 방법에 대한 생각하자.

이 중 (3, 7, 42), (3, 8, 24), (3, 9, 18), (3, 10, 15), (4, 5, 20), (3, 3, 4, 12)는 불가능하다.

① (3, 7, 42)의 경우, 정삼각형을 먼저 놓으면 정7각형과 정42각형이 첫 번째 놓은 정삼각형의 둘레를 돌아가면서 배치되어야 조건을 만족한다. 하지만 정삼각형의 변은 3개이므로, 정7각형과 정42각형을 배치하면 반드시 어떤 하나의 도형이 다른 것보다 1개 많아지게 되어 한 점에 정삼각형 1개과 정7각형 2개, 또는 정삼각형 1개와 정42각형 2개가 놓이게 된다. 이때 세 각의 합은 약 317°와 약 403°로 360°가 되지 않으므로 (3, 7, 42)로는 평면 테셀레이션이 불가능하다.

② (3, 8, 24)의 경우, 정삼각형을 먼저 놓으면 정8각형과 정24각형이 첫 번째 놓은 정삼각형의 둘레를 돌아가며 배치되어야 조건을 만족한다. 하지만 마지막 점에 정삼각형 1개와 정8각형 2개, 또는 정삼각형 1개와 정24각형 2개가 놓이게 된다. 이때 세 각의 합은 330°와 390°로 360°가 되지 않으므로 (3, 8, 24)로는 평면 테셀레이션이 불가능하다.

③ (3, 9, 18)의 경우, 정삼각형을 먼저 놓으면 정9각형과 정18각형이 첫 번째 놓은 정삼각형의 둘레를 돌아가며 배치되어야 조건을 만족한다. 하지만 마지막 점에 정삼각형 1개와 정9각형 2개, 또는 정삼각형 1개와 정18각형 2개가 놓이게 된다. 이때 세 각의 합은 340°와 380°로 360°가 되지 않으므로 (3, 9, 18)로는 평면 테셀레이션이 불가능하다.

④ (3, 10, 15)의 경우, 정삼각형을 먼저 놓으면 정10각형과 정15각형이 첫 번째 놓은 정삼각형의 둘레를 돌아가며 배치되어야 조건을 만족한다. 그런데 마지막 점에 정삼각형 1개와 정10각형 2개, 또는 정삼각형 1개와 정15각형 2개가 놓이게 된다. 이때 세 각의 합은 348°와 372°로 360°가 되지 않으므로 (3, 10, 15)로는 평면 테셀레이션이 불가능하다.

⑤ (4, 5, 20)의 경우, 정오각형을 먼저 놓으면 정사각형과 정20각형이 첫 번째 놓은 정오각형의 둘레를 돌아가며 배치되어야 조건을 만족한다. 그런데 마지막 점에 정오각형 1개와 정사각형 2개, 또는 정오각형 1개와 정20각형 2개가 놓이게 된다. 이때 세 각의 합은 288°와 432°로 360°가 되지 않으므로 (4, 5, 20)으로는 평면 테셀레이션이 불가능하다.

⑥ (3, 3, 4, 12)의 경우, (3, 3, 4, 12)와 (3, 4, 3, 12)의 두 가지를 만들 수 있으나, 둘 모두 비정규 테셀레이션이 된다.

먼저, 정12각형을 기준으로 각 꼭짓점에 (3, 3, 4, 12)로 테셀레이션을 한다고 하면, 정12각형의 한 꼭짓점에 정삼각형과 정삼각형 그리고 정사각형이 와야 (3, 3, 4, 12)의 조건을 만족하게 된다. 그런데 이렇게 테셀레이션을 하면 정12각형과 붙지 않은 바깥쪽에 정삼각형 3개가 모이게 되어 조건에 맞지 않다.

다음으로 정12각형을 기준으로 각 꼭짓점에 (3, 4, 3, 12)로 테셀레이션을 한다고 하면, 정12각형의 한 꼭짓점에 정삼각형, 정사각형, 정삼각형이 와야 (3, 4, 3, 12)의 조건을 만족하게 된다. 그런데 이렇게 테셀레이션을 하면 정12각형의 바깥쪽에 정사각형, 정삼각형, 정사각형이 모이게 되어 조건에 맞지 않는다.

한편, 정사각형이나 정삼각형을 기준으로 각 꼭짓점에 (3, 3, 4, 12)로 평면 테셀레이션을 하는 경우도 마찬가지 패턴으로 조건에 맞지 않는다. 따라서

(3, 3, 4, 12)는 조건 아래에서는 평면 테셀레이션이 가능하지 않다.

명제 ⑩ 정다각형 3개 종류로, 합동인 도형만 사용하되 변 위에 점들이 오는 평면 테셀레이션은 없다.

증명. 평면 테셀레이션이 가능하려면 한 변 위에 꼭짓점이 오므로 다른 두 도형이 만나서 이루는 각이 180°이어야 한다. 따라서 사용가능한 도형은 한 내각의 크기가 180°보다 작은 정삼각형, 정사각형, 정육각형뿐이다. 이 때 세 종류가 사용되므로 같은 모양은 올 수 없다. 그런데 정삼각형의 한 변 위에 정사각형, 정육각형이 오는 경우는 $90^\circ+120^\circ=210^\circ$이므로 불가능하다. 반면 정사각형의 한 변 위에 정삼각형, 정육각형이 오는 경우는 $60^\circ+120^\circ=180^\circ$로 가능하다. 하지만, 이 경우는 결국 [그림 2]와 같이 밀린 경우이므로 의미가 없다. 그리고 정육각형의 한 변 위에 정삼각형, 정사각형이 오는 경우는 $60^\circ+90^\circ=150^\circ$로, 가능하지 않다.

명제 ⑬ 정다각형 $n(n\geq 4)$개 종류로, 합동인 도형만 사용해 한 점에 모이게 하는 평면 테셀레이션은 없다.

증명. 서로 다른 정다각형 4개를 더하여 평면 테셀레이션이 가능하다고 하자. 먼저, 내각이 작은 순서대로 정삼각형, 정사각형, 정오각형, 정육각형을 각각 하나씩 붙여나가면 그 내각의 합은 $60^\circ+90^\circ+108^\circ+120^\circ=378^\circ$로 360°를 넘어 평면 테셀레이션이 불가능하다. 다른 조합은 내각의 합이 이보다 더 커지므로 불가능하다.

명제 ⑭ 정다각형 $n(n\geq 4)$개 종류로, 합동인 도형만 사용하되 변 위에 점들이 오는 평면 테셀레이션은 없다.

증명. 이러한 평면 테셀레이션이 가능하다고 하자. 한 변 위에 꼭짓점들이 모이는 도형은 서로 다른 3가지의 정다각형이어야 한다. 내각이 작은 순서대로 정삼각형, 정사각형, 정오각형, 정육각형을 각각 하나씩 붙여나가면 그 내각들의 합은 $60^\circ+90^\circ+108^\circ=258^\circ$로 180°를 넘어 평면 테셀레이션이 불가능하다.

〈사용 도형이 비정다각형인 경우〉

사용 도형이 비정다각형인 경우, 대수적으로 패턴화 하여 고찰할 수 있는 경우는 사실상 〈사용 도형이 비정다각형인 경우〉의 ①과 ②의 일부뿐이다. 이 중 평면 테셀레이션이 가능한 경우를 비정규 테셀레이션이라 한다.

①의 경우는 사용되는 도형에 따라 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.

> **명제 ①-삼각형인 경우**
> 임의의 모든 삼각형은 평면 테셀레이션이 가능하다.

증명. 삼각형의 세 내각의 합은 180°이기 때문에, 세 개의 각을 모두 모으면 항상 180°가 된다. 그러므로 삼각형 6개를 사용하여 2개씩 점대칭 형식으로 배열하면 항상 360°가 되어 평면 테셀레이션이 가능하다.

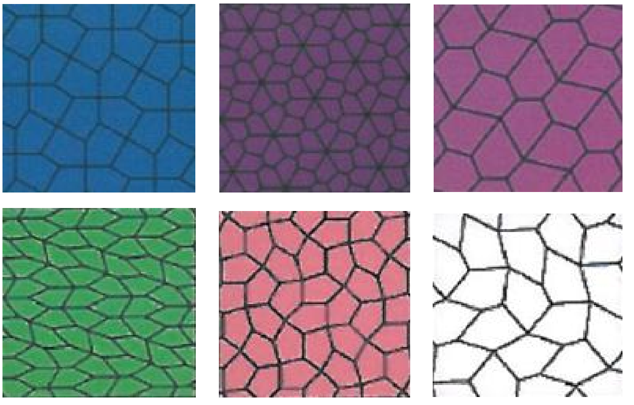
> **명제 ①-사각형인 경우**
> 임의의 모든 사각형은 평면 테셀레이션이 가능하다.

증명. 사각형의 내각의 합은 360°이므로 한 점에 네 개의 사각형이 각각 다른 각으로 모이게 하면 항상 한 점에 모이는 각의 합이 360°가 되므로 평면 테셀레이션이 가능하다.

한편, 오각형이나 육각형의 경우 전적으로 대수적 관점에서 증명하는 것은 학교수학의 수준을 훨씬 넘어서고 있다[11]. 따라서 기하학적 관점과 병행하여 정당화를 탐구하기로 한다.

> **진술 ①-오각형인 경우**
> 합동인 오각형을 사용하여 한 점에 모이는 비정규 테셀레이션은 6개가 발견되었다. 그러나 그 뿐인지는 알려지지 않았다.

11) Reinhardt, Karl(1918) 참고



[그림6] 오각형 테셀레이션 1[12)]

명제 ①-육각형인 경우
육각형을 사용한 비정규 테셀레이션은 3가지뿐이다.

증명. 육각형을 붙여 평면 테셀레이션이 가능하려면 한 점에 모인 각의 합은 360°가 되어야 한다. 또한 한 점에 두 개의 내각이 모인다고 하면 하나의 육각형은 오목육각형이어야 한다. 그리고 네 개 이상의 내각이 한 꼭짓점에 모인다고 하면 육각형의 내각의 합이 720°이므로 나머지 내각의 합이 360°가 되어야 한다. 이러한 조건을 만족하는 볼록육각형은 존재하지 않는다. 따라서 한 점에는 세 개의 육각형의 내각이 모여야 한다. 그리고 한 점에 세 개의 내각이 모여 360°가 된다는 것은 육각형의 세 개씩의 내각의 합이 360°가 된다는 것과도 같다. 한편, 평면 테셀레이션이 되려면 하나의 도형으로 평면을 메워야 하므로 한 단위도형을 둘러싸는 변들이 모두 달라야 한다. 따라서 평면 테셀레이션을 하려면 다음과 같은 조건을 만족해야 한다.

조건 ①. 한 점에 모인 각의 합은 360°가 되어야 한다.

조건 ②. 한 점에 세 개의 육각형의 내각이 모여야 한다.

---

12) http://cafe.daum.net/mindstay/oYjm/510?q=%ED%8E%9C%EB%A1%9C%EC%A6%88%ED%83%80%EC%9D%BC%EB%A7%81

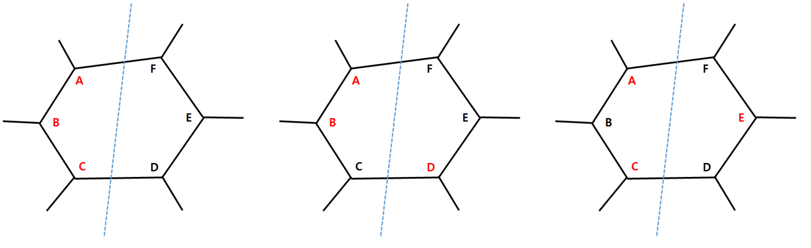
조건 ③. 남는 변이 있거나 중복 사용되는 변이 없어야 한다.

이제 [그림 5]와 같은 임의의 육각형이 있다고 하자. 먼저 육각형의 내각은 6개이므로 조건 ①과 ②에 의해 세 각의 합이 360°가 되는 경우를 나누면 다음의 세 가지이다.

경우 1. $A+B+C=360°$, $D+E+F=360°$

경우 2. $A+B+D=360°$, $C+E+F=360°$

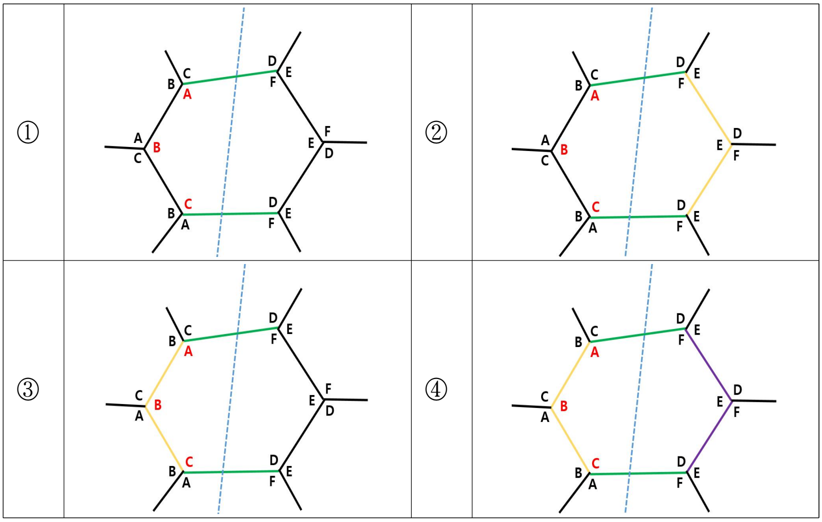
경우 3. $A+C+E=360°$, $B+D+F=360°$



[그림 7] 각의 경우의 수

〈경우 1〉

이 육각형에 대해 평면 테셀레이션이 된다고 가정하자. $A+B+C=360°$, $D+E+F=360°$인 경우, 변 AB에 올 수 있는 변은 각의 관계를 고려하면 BA, BC, CB, AC, CA뿐이다. 그러나 변의 연결 관계를 생각하면 AC, CA는 불가능하다. 나머지 경우에 대해 변의 연결 관계와 각의 관계를 생각해 가면 $AB-BA$ 대응인 경우 2가지, $AB-BC$ 대응인 경우 2가지가 있으며, $AB-CB$ 인 경우는 대응관계를 형성하지 않는다. 따라서 다음의 결과들을 얻을 수 있다.

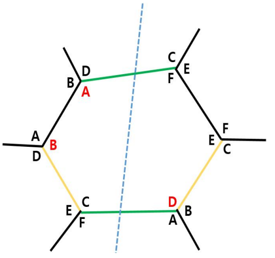


[그림 8] 경우 1의 결과

①의 경우, 평면 테셀레이션이 가능하려면 $AF=CD$라는 조건을 추가하면 된다(단, $AF=CD$는 끝 각이 A, F인 변과 끝 각이 C, D인 변의 길이가 같다는 것을 의미한다). ②, ③, ④의 경우는 경우 ①의 특수한 경우이므로 평면 테셀레이션이 가능하다. 따라서 $A+B+C=360^\circ$, $D+E+F=360^\circ$이고 $AF=CD$인 육각형이면 평면 테셀레이션이 가능하다.

〈경우 2〉

마찬가지 방법으로 $A+B+D=360^\circ$, $C+E+F=360^\circ$인 경우, 변 AB에 올 수 있는 변은 각의 관계를 고려하면 BA, BD, DB, AD, DA뿐이다. 그리고 변의 관계를 고려하면 BD, DB, AD, DA는 불가능하다. 나머지 경우의 변과 각의 관계를 살펴보면 다음의 한 가지만 성립한다.



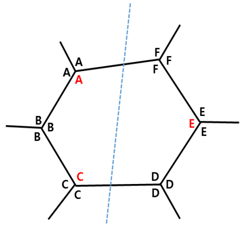
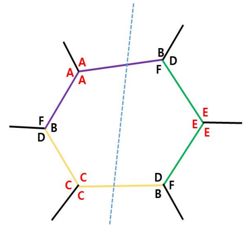
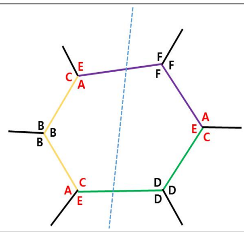
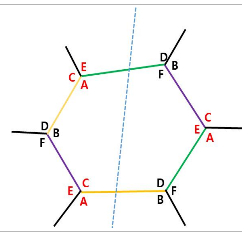
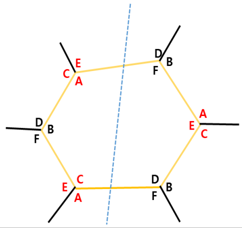
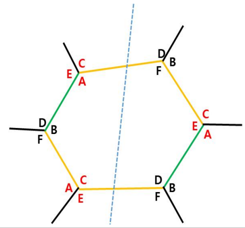
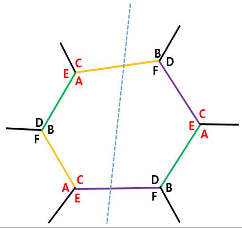
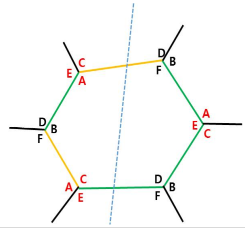
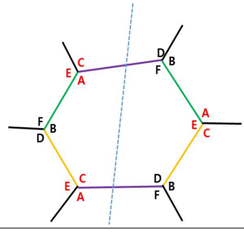
[그림 9] 경우 2의 결과

따라서 $AF=DC$, $BC=DE$를 추가로 만족하면 평면 테셀레이션이 가능하다. 결과적으로 $A+B+D=360^{\circ}$, $C+E+F=360^{\circ}$이고 $AF=DC$, $BC=DE$이면 평면 테셀레이션이 가능하다.

〈경우 3〉

마찬가지 방법으로 $A+C+E=360^{\circ}$, $B+D+F=360^{\circ}$인 경우, 변 AB에 올 수 있는 변은 AB, AF, CB, CD, ED, EF 뿐이다. 각 경우의 변과 각의 관계를 살펴보면 다음의 유형들을 얻을 수 있다.

①의 경우는 변을 붙이는 방향성으로 인해 불가능하다. ②, ③의 경우는 이웃한 세 쌍의 변의 길이가 같다는 조건을 주면 평면 테셀레이션이 가능하다. ⑤의 경우는 모든 변이 같아지므로 정육각형 테셀레이션과 본질적으로 같다. ④의 경우, 이 육각형은 변 BC와 FE의 중점을 이은 선분에 대해 선대칭이므로 각 A와 각 D, 각 B와 각 E, 각 C와 각 F가 같다. 따라서 세 개의 이웃한 내각의 합이 360°가 되고, 이것은 경우 1과 본질적으로 같다. ⑥, ⑦, ⑧, ⑨도 ④와 같은 경우이거나 조건을 더 부가한 경우이므로 평면 테셀레이션이 가능하다.

①		②	
③		④	
⑤		⑥	
⑦		⑧	
⑨			

[그림 10] 경우 3의 결과

결과적으로 육각형으로 평면 테셀레이션이 가능한 경우는 다음 3가지뿐이다.

〈표 2〉 육각형 테셀레이션의 조건

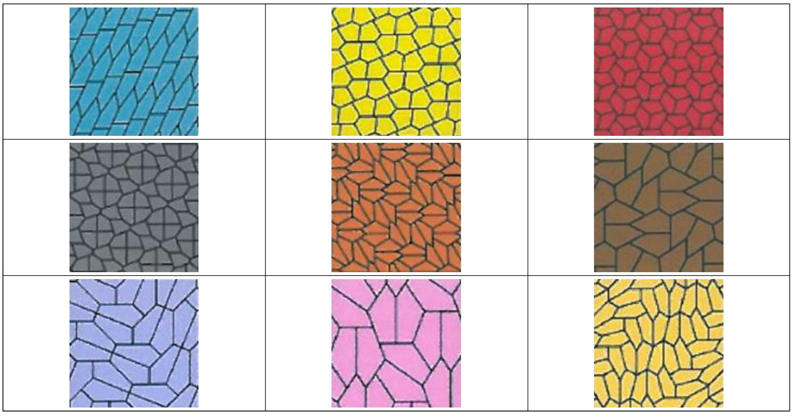
<table>
<tr><td>$A+B+C=360^\circ$
$D+E+F=360^\circ$
$AF=CD$</td><td>$A+B+D=360^\circ$
$C+E+F=360^\circ$
$AF=DC,\ BC=DE$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$A+C+E=360^\circ,\ B+D+F=360^\circ$
$AB=AF,\ BC=DC,\ DE=FE$
$A=C=E=120^\circ$ (혹은 $B=D=F=120^\circ$)</td></tr>
</table>

명제 ①-칠각형 이상인 경우

칠각형 이상의 비정다각형으로는 평면 테셀레이션이 불가능하다.

증명. 다각형으로 평면 테셀레이션을 하려면 각 점에 적어도 3개의 도형이 모여야 한다. 따라서 한 다각형을 기준으로 하였을 때 각 꼭짓점에 적어도 3개의 도형이 모이게 되므로, 그 모인 각을 모두 세었을 때 다각형의 모든 각이 적어도 세 번씩 나와야 한다. 그리고 모인 각들의 합은 그 다각형의 내각의 합의 3배가 되고, 이것이 $360^\circ \times n$보다 작거나 같아야 한다(n각형일 때). 따라서 $3\times 180^\circ(n-2) \le 360^\circ n$이므로 $n \le 6$이다. 그러므로 6개 이하의 변을 가지고 있어야 평면 테셀레이션이 가능하다.

진술 ② 오각형의 평면 테셀레이션 중 변 위에 꼭짓점이 오는 경우는 9가지가 발견되었다. 그러나 그 뿐인지는 증명되지 않았다.



[그림 11] 오각형 평면 테셀레이션 2[13)]

지금까지의 논의를 정리하면 평면 테셀레이션이 가능한 경우는 다음과 같다.

〈표 3〉 평면 테셀레이션이 가능한 경우

사용 도형	정규테셀레이션	준정규테셀레이션	비정규테셀레이션
정다각형의 ①	(3, 3, 3, 3, 3, 3) (4, 4, 4, 4) (6, 6, 6)		
정다각형의 ⑤		(3, 12, 12) (4, 8, 8) (3, 3, 3, 3, 6) (3, 3, 3, 4, 4) (3, 6, 3, 6)	
정다각형의 ⑨		(4, 6, 12) (3, 4, 4, 6)	
비정다각형의①	모든 삼각형, 모든 사각형, 7가지 오각형, 3가지 육각형		
비정다각형의②	8가지 오각형		

13) http://cafe.daum.net/mindstay/oYjm/510?q=%ED%8E%9C%EB%A1%9C%EC%A6%88%ED%83%80%EC%9D%BC%EB%A7%81

Ⅲ. 결 론

학교수학에서 다루어지고 있는 테셀레이션의 지도 내용은 정다각형의 평면 테셀레이션에 관한 기하학적 또는 일부의 대수적 내용이거나 에셔(Escher)의 작품을 활용한 다양한 테셀레이션 제작 활동이 대부분이다. 연구 논문의 경우 대수적 고찰을 하는 경우가 소수 있었으나 알려진 경우의 수에 집중하고 있어 과정적인 측면에서의 엄밀성에 아쉬움이 있다. 이러한 연구는 사용 도형의 모양이나 사용 개수가 어떻게 정해졌는지에 대한 정보를 주지 못하거나 한정적이어서 수학하는 사고과정과 경험을 줄 수 없다는 한계가 있다. 그리고 기존의 연구에서는 변 위에 꼭짓점이 오는 경우나 닮음인 도형을 사용하는 경우에 대한 고려가 이루어지지 않고 있다. 하지만 정오각형이 아닌 오각형 테셀레이션에는 이러한 경우가 발견되어 있다.

따라서 본 연구는 평면 테셀레이션 구성의 고려 요소를, 사용하는 도형의 모양, 사용하는 서로 다른 도형의 개수, 사용하는 도형의 크기, 모으는 방법 등 4가지로 정하여 총 32가지의 경우를 고찰하였다. 그리고 대수적 고찰에 의해 얻어진 도형의 모양과 사용 개수를 특정한 후, 모이는 모양을 고려하여 최종적으로 평면 테셀레이션이 가능한 경우를 도출하였다.

그 결과 기존의 정다각형을 사용도형으로 하는 정규 테셀레이션, 준정규 테셀레이션에 대한 내용을 대수적으로 정당화하였으며, 기하학적으로 다루어지고 있는 비정다각형의 테셀레이션에 관한 내용을 학교수학의 수준에서 정당화를 하였다. 이러한 정당화 과정은 기존의 대수적 고찰과 접근 방법에 차이가 있을 뿐만 아니라, 고찰 대상과 범주도 광범위해 수학적 엄밀성이란 측면에서 보다 충실한 고찰이라 할 수 있다.

그러나 비정다각형의 고찰에서 모든 경우를 다루지 못하였는데, 이들 경우는 복잡도가 너무 높거나 대수적 관점에서 고찰이 불가능한 경우들로 중등학교 수준을 넘어서고 있기 때문이다. 이것은 이 연구의 한계이기도 하며 따라서 추후 고찰이 요구된다.

본 연구에서 제시한 논증적 고찰의 결과는 수학적 지식이 만들어지는 과정을 직접 경험한 것으로, 테셀레이션에 관한 지식의 형성 과정을 통해 수학적

지식을 만드는 과정인 'Make Math' 활동을 한 것이다. 때로는 수학적 사고 과정을 따르는 것이 비경제적일 수도 있다. 그러나 과정을 제외하고 결과만을 효율성의 측면에서 다룬다면 수학적 지식들은 그 개연성이 없으며, 그러한 것을 경험하는 것은 수학적 활동을 하였다고 할 수도 없을 것이다.

그러므로 본 연구의 내용은 2015 개정 수학과 교육과정이 지향하고 있는 교과역량의 신장과 탐구 학습, 토론 학습, 프로젝트 학습 등의 수업을 수행함에 있어 수준별 심화 수업, 영재 관련 수업, R&E 활동 등에 활용할 수 있다. 또한 이 내용을 직접 경험하고 수학적 논의를 하는 과정에서, 결과로 함의되어 드러나지 않는 수학적 결과물이 있으며, 그 목적은 패턴화・범주화를 추구하는 수학의 본질에 있음을 이해할 수 있다. 다시 말해, 수학적 지식들은 경우의 수를 산정하고, 그에 대한 고찰에서 시행착오와 패턴화를 거쳐 궁극적으로 얻어지는 산물들을 처리하는 과정임을 알게 하는 좋은 소재가 될 것이다. 또한 교사에게 부여 되는 수업은 더 이상 교과서와 정규 수업 시간에만 행해지는 전통적인 수업만이 아니라 수학 동아리활동, 영재학급, 자유학기제, R&E 등, 수업의 종류와 질의 범주가 다양화하고 넓어지고 있다. 따라서 이들 수업을 진행할 수 있는 교사의 교과 전문성이 어느 때보다 강조되고 있기도 하다. 이러한 연구 내용은 교사의 교과 전문성 신장에도 도움이 될 것이다.

참고문헌

계영희(2005). GSP를 활용한 테셀레이션 작도. 한국수학교육학회지 시리즈 E 〈수학교육 논문집〉, 19(1), 319-320.

계영희·김종민(2008). GSP를 활용한 한국 전통문양의 테셀레이션 작도. 한국수학사학회지, 21(2), 71-80.

교육과학기술부(2011), 2015 개정 수학과 교육과정. http://ncic.re.kr/.

김남균(2004). 패턴블록과 조노돔을 활용한 테셀레이션 지도방안 탐색. 한국수학교육학회지 시리즈 E 〈수학교육 논문집〉, 18(2), 497-504.

박현미·강신포·김성준(2007). 테셀레이션(Tessellation)을 활용한 수학학습이

공간감각능력에 미치는 효과 분석. 한국초등수학교육학회지, 11(2), 117-136.

백선수·김원경(2007). 초등학교에서 테셀레이션의 수학적 원리 지도 가능성 탐색. 한국수학교육학회지 시리즈 A 〈수학교육〉, 46(1), 81-96.

빈지현(2015). 정다각형과 준정다각형을 이용한 평면 테셀레이션에 대한 연구. 부산대학교 교육대학원 석사학위논문.

신원국(2009). 테셀레이션이 가지고 있는 다양한 수학적 성질에 관한 연구. 서울시립대학교 교육대학원 석사학위논문.

이순희(2004). 테셀레이션을 이용한 기하단원 지도방안 연구. 홍익대학교 교육대학원 석사학위논문.

임해경·박은영(2002). 컴퓨터 소프트웨어를 활용한 테셀레이션 교수 학습 자료 개발 및 활용 방안, 한국수학교육학회지 시리즈 E 〈수학교육 논문집〉, 13(2), 563-589.

전영아(2000). 수학 교수-학습에서의 테셀레이션 활용 가능성 탐색: '도형'과 규칙성과 함수'영역을 중심으로. 이화여자대학교 교육대학원 석사학위논문.

吉田稔(요시다 미노루) 외(1989), 『話題源數學』, 東京: とうほう.

杉原厚吉(스기하라 코키치)(2011), 「エッシャー・マジック(Escher Magic)」. 東京: 東京大學出版會.

Reinhardt, Karl(1918). Über die Zerlegung der Ebene in Polygone.. Dissertation Frankfurt am Main (in German), Borna-Leipzig, Druck von Robert Noske.

나우뉴스, 새로운 형태 '타일'이 나왔다…수학사에 남을 '15번째 오각형' 발견. http://nownews.seoul.co.kr/news/newsView.php?id=20150818601008. 2017/08/20.

네이버 지식백과, "테셀레이션", http://terms.naver.com/entry.nhn?docId=3340698&cid=55642&categoryId=55642. 2017/08/20.

위키백과(2017). 유클리드 평면의 테셀레이션.
http://wiki.mathnt.net/index.php?title=%EC%9C%A0%ED%81%B4%EB%A6%AC%EB%93%9C__%ED%8F%89%EB%A9%B4%EC%9D%98__%E

D%85%8C%EC%85%80%EB%A0%88%EC%9D%B4%EC%85%98
다음 카페(2012). 제3의 고체, 준결정의 발견.
http://cafe.daum.net/mindstay/oYjm/510?q=%ED%8E%9C%EB%A1%9C%EC%A6%88%ED%83%80%EC%9D%BC%EB%A7%81. 2012/10/08.

ABSTRACT

Algebraic Consideration of Plane Tessellation

Chung Young-woo (Ulsan University)
Kim Boo-yoon · Ryu Hyun-ki (Pusan National University)
Kim Do-young (Korea Science Academy)
Cho Ha-hyun (NamSan Middle School)

The content of tessellation covered in school mathematics is mainly resultant from the geometrical point of view. However, the geometric point of view does not give an answer as to how to determine the shape of the figure and the number of figures used, and whether it is in all cases.
Therefore, in this study, we will set the basic elements of tessellation from the algebraic viewpoint, and set propositions for each case considering the basic elements, and explore its justification at the level of school mathematics.
In this process, we tightened the definition of tessellation and the conditions for tessellation. We also recognized that generally speaking results do not refer to procedural outcomes.
Through these activities, we were able to understand the formal process of mathematics and its results, and we were able to complete another approach to tessellation.

Key words: Tessellation, Justification, the algebraic viewpoint, Make Math

정영우 울산대학교 자연과학대학 수학과 객원교수
전화번호: 052-259-2750 Email: young38woo@hanmail.net

김부윤 부산대학교 사범대학 수학교육과 교수
전화번호: 051-510-2685 Email: kimby@pusan.ac.kr

유현기 부산대학교 교육대학원 수학교육전공 석사과정
전화번호: 051-510-1622 Email: jamie0307@daum.net

김도영 한국과학영재학교 교사
전화번호: 051-897-7067 Email: dodojames@naver.com

조하현 남산중학교 교사
전화번호: 070-7789-1895 Email: harrycho1492@naver.com

논문접수일: 2018년 8월 7일
논문심사일: 2018년 8월 30일
심사완료일: 2018년 9월 11일